济宁市2022年高考模拟考试

数学试题参考答案

2022.04

一、单项选择题:每小题5分,共40分.

1.C 2.D 3.C 4.A 5.A 6.B 7.B 8.C

二、多项选择题:每小题5分,共20分.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9.AC 10.ABD 11.BD 12.BCD

三、填空题:每小题5分,共20分.

13.$\frac{2\pi}{3}$ 14.-160 15.$2\sqrt{6}$ 16.121

四、解答题:共6小题,共70分.

17.解:(1)零假设为H_0:接种疫苗A与未接种疫苗A与感染病毒B无关,即疫苗A无效.

根据列联表可得$\chi^2=\frac{100\times(40\times30-20\times10)^2}{60\times40\times50\times50}=\frac{50}{3}\approx16.667>10.828$ ………………… 3分

因为当假设H_0成立时,$P(\chi^2\geqslant10.828)=0.001$,所以根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验,我们推断$H_0$不成立,即疫苗$A$有效,此推断犯错误的概率不大于0.001. ………… 5分

(2)从接种疫苗A的50名志愿者中按分层随机抽样方法取出10人,其中未感染病毒B的人数为$10\times\frac{40}{50}=8$人,感染病毒B的人数为$10\times\frac{10}{50}=2$人.

则X的所有可能取值为0,1,2.

$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$ ………………………………………… 6分

$P(X=1)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$ ………………………………………… 7分

$P(X=2)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$ ………………………………………… 8分

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

…………………………………………………………………… 9分

故随机变量X的数学期望为$E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$. ……………………… 10分

18.解:(1)$\because AA_1\perp$平面ABC,$BD\subset$平面ABC,

$\therefore AA_1\perp BD$, ………………………………………………………… 1分

又△ABC为等边三角形，D为AC的中点，

∴$BD\perp AC$，又$AA_1\cap AC=A$

∴$BD\perp$平面AA_1C_1C，又$AC_1\subset$平面AA_1C_1C，…………………………………… 2 分

∴$BD\perp AC_1$. …………………………………………………………………………… 3 分

在直角梯形AA_1C_1C中，$AC=2AA_1=2A_1C_1$

∴$AC_1\perp A_1D$，又$BD\cap A_1D=D$，……………………………………………… 4 分

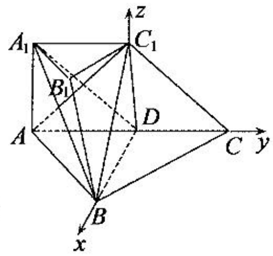
∴$AC_1\perp$平面A_1BD，又$AC_1\subset$平面ABC_1，………………………………… 5 分

∴平面$ABC_1\perp$平面A_1BD. …………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知DB,DC,DC_1两两垂直，如图所示，以D为坐标原点，DB,DC,DC_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，则

$A(0,-1,0),B(\sqrt{3},0,0),C(0,1,0),A_1(0,-1,1),C_1(0,0,1)$，………………… 7 分

∴$\overrightarrow{DA_1}=(0,-1,1),\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},0,0)$



设平面A_1BD的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-y+z=0\\ \sqrt{3}x=0\end{cases}$

所以平面A_1BD的一个法向量为$\vec{m}=(0,1,1)$ ……………… 8 分

设平面BB_1C_1C的法向量为$\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$，

因为$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{C_1C}=(0,1,-1)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1C}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-\sqrt{3}x_0+y_0=0\\ y_0-z_0=0\end{cases}$

所以平面BB_1C_1C的一个法向量为$\vec{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$ ………………………………… 11 分

∴平面A_1BD与平面BB_1C_1C夹角θ的余弦值为

$\cos\theta=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ………………………………… 12 分

19. 解：(1)在ΔACD中，由正弦定理得$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{AC}{\sin D}$，

即$AD\cdot\sin D=AC\cdot\sin\angle ACD$，……………………………………………… 2 分

因为$AB//CD$，所以$\angle ACD=\angle CAB$，

所以$AD\cdot\sin D=AC\cdot\sin\angle CAB$

在ΔABC中，由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$，

即$AC\cdot\sin\angle CAB=BC\cdot\sin B$，………………………………………………… 4 分

所以$AD\cdot\sin D=BC\cdot\sin B$. ……………………………………………………… 5 分

又 $AD\cdot\sin D=2CD\cdot\sin B$，

所以 $BC\cdot\sin B=2CD\cdot\sin B$，即 $BC=2CD$. ………………………………………… 6 分

(2)方法一：由(1)知 $CD=\frac{1}{2}BC=1$.

在 ΔACD 中，由余弦定理得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$，

解得 $AC=\sqrt{7}$. ………………………………………………………………………… 7 分

所以 $\cos\angle CAB=\cos\angle ACD=\frac{CD^2+AC^2-AD^2}{2CD\cdot AC}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ………………………………… 9 分

在 ΔABC 中，$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle CAB$，解得 $AB=1$ 或 3.

又因为 $ABCD$ 为梯形，所以 $AB=3$. ………………………………………………… 11 分

又梯形 $ABCD$ 的高为 $h=AD\cdot\sin60^\circ=\sqrt{3}$，

所以梯形 $ABCD$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}(AB+CD)h=2\sqrt{3}$. …………………………………… 12 分

方法二：由(1)知 $CD=\frac{1}{2}BC=1$.

在 ΔACD 中，由余弦定理得 $AC^2=AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$，

解得 $AC=\sqrt{7}$，………………………………………………………………………… 7 分

所以 $\cos\angle ACD=\frac{AC^2+DC^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\frac{1+7-4}{2\times1\times\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，…………………………… 9 分

所以 $\sin\angle ACD=\sqrt{1-\cos^2\angle ACD}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，又四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，

所以 $\sin\angle ACB=\sin(120^\circ-\angle ACB)=\sin120^\circ\cos\angle ACD-\cos120^\circ\sin\angle ACD$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{7}\sqrt{7}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{3}{14}\sqrt{21}，$$ ………………………………………… 11 分

所以 $S_{梯形ABCD}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times1\times2\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times2\times\frac{3\sqrt{21}}{14}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. ………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意知 $b_1=a_2=a_1+(\sqrt{2})^2=2+2=4$ ……………………………………… 1 分

当 $n\geq2$ 时，$b_n=a_{2n}=a_{2n-1}+(\sqrt{2})^{2n}=2a_{2n-2}+2^n=2b_{n-1}+2^n$ ………………………… 3 分

所以 $\frac{b_n}{2^n}=\frac{b_{n-1}}{2^{n-1}}+1$

所以数列 $\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$ 是以 1 为公差，$\frac{b_1}{2}=2$ 为首项的等差数列. ………………………………… 4 分

(2)方法一：由(1)知 $\frac{b_n}{2^n}=2+(n-1)=n+1$，所以 $b_n=(n+1)\cdot2^n$. …………………………… 5 分

所以数列$\{a_n\}$的前 $2n$ 项和为

$S_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$=[a_2-(\sqrt{2})^2]+[a_4-(\sqrt{2})^4]+\cdots+[a_{2n}-(\sqrt{2})^{2n}]+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$=2(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})-(2+2^2+\cdots+2^n)$ ………………………………………… 7 分

$=2(b_1+b_2+\cdots+b_n)-\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}$

$=2T_n+2-2^{n+1}$ ………………………………………………………………… 8 分

其中 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,即 $T_n=2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\times2^n$,

所以 $2T_n=2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n+(n+1)\times2^{n+1}$,

两式相减得 $-T_n=4+(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(n+1)\times2^{n+1}$

$=4+\dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\times2^{n+1}$

$=-n\times2^{n+1}$

所以 $T_n=n\times2^{n+1}$ ……………………………………………………………… 11 分

所以 $S_{2n}=2T_n+2-2^{n+1}=2n\times2^{n+1}+2-2^{n+1}=(2n-1)\times2^{n+1}+2$. ……………… 12 分

方法二:令 $c_{n+1}=a_{2n+1}=2a_{2n}=2[a_{2n-1}+(\sqrt{2})^{2n}]=2a_{2n-1}+2^{n+1}=2c_n+2^{n+1}$,

所以$\dfrac{c_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{c_n}{2^n}=1$,∵$\dfrac{c_1}{2}=\dfrac{a_1}{2}=1$,

所以$\{\dfrac{c_n}{2^n}\}$是一个首项为 1,公差为 1 的等差数列,

所以$\dfrac{c_n}{2^n}=n$,即 $c_n=n\cdot2^n$, ………………………………………………… 6 分

所以 $T_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=(c_1+c_2+\cdots+c_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=(1\times2^1+2\times2^2+\cdots+n\cdot2^n)+[2\times2^1+3\times2^2+\cdots+(n+1)2^n]$

$=3\times2+5\times2^2+\cdots+(2n+1)2^n$, …………………………………………… 8 分

所以 $2T_{2n}=3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n+1)2^{n+1}$,

所以 $-T_{2n}=6+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n+1)2^{n+1}$,

$=6+2\times\dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n+1)2^{n+1}$

$=-2+(1-2n)2^{n+1}$

所以 $T_{2n}=2+(2n-1)2^{n+1}$ ………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)由题意可得$\begin{cases}m^2=8p,\\ \dfrac{1}{2}\times\dfrac{p}{2}\cdot|m|=\dfrac{1}{2}p^2,\end{cases}$ ……………………………………… 2 分

解得 $p=2$.

故抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$. …………………………………………………………………… 3 分

(2)由题意直线 l 的斜率一定存在且不为 0,设直线 l 的方程为 $x=ty+1,t\neq0$,

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$.

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4ty-4=0$.

所以 $y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4$. …………………………………………………………………… 5 分

由 AC 垂直于 l,直线 AC 的方程为 $y-y_1=-t(x-x_1)$

由 $\begin{cases}y-y_1=-t(x-x_1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 得 $ty^2+4y-4tx_1-4y_1=0$.

所以 $y_1+y_3=-\dfrac{4}{t},y_1y_3=\dfrac{-4tx_1-4y_1}{t}$. …………………………………………………… 6 分

$$\therefore |AC|=\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}=\sqrt{(1+\frac{1}{t^2})[(y_1+y_3)^2-4y_1y_3]}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{1}{t^2})\frac{16+16t^2x_1+16ty_1}{t^2}}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{1}{t^2})\frac{16+4t^2{y_1}^2+16ty_1}{t^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot|ty_1+2|$$

$$=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot(ty_1+2)$$ …………………………………………………………………… 8 分

同理可得 $|BD|=\dfrac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot(ty_2+2)$ ………………………………………………………… 9 分

所以 $|AC|+|BD|=\dfrac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot[t(y_1+y_2)+4]=\dfrac{8\sqrt{t^2+1}}{t^2}(t^2+1)=8\sqrt{\dfrac{(t^2+1)^3}{t^4}}$ ………

…………………………………………………………………………………………………… 10 分

令 $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2},x>0$,则 $f'(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{x^3},x>0$

所以当 $x\in(0,2)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

所以当 $x=2$ 时,$f(x)$取得最小值,即当 $t=\pm\sqrt{2}$时,$|AC|+|BD|$最小值为 $12\sqrt{3}$. … 12 分

22. 解:(1)$f'(x)=a-\sin x,x\in[0,\pi]$

当 $a\geqslant1$ 时,$f'(x)=a-\sin x\geqslant0$,$f(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,$f(x)$无极值. ……………… 1 分

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)=a-\sin x\leqslant0$,$f(x)$在$[0,\pi]$上单调递减,$f(x)$无极值. ……………… 2 分

当 $0<a<1$ 时,$f'(x)=0$ 在$[0,\pi]$上有 2 个实根,设其为 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$.

当 $x\in(0,x_1)\cup(x_2,\pi)$时,$f'(x)>0$;当 $x\in(x_1,x_2)$时,$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递增，在 (x_1,x_2) 单调递减，在 (x_2,π) 单调递增.

所以 $f(x_1)$ 为 $f(x)$ 的极大值，$f(x_2)$ 为 $f(x)$ 的极小值. ………………………………… 3 分

由正弦函数的对称性可知 $x_1+x_2=\pi$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的所有极值的和为

$f(x_1)+f(x_2)=a(x_1+x_2)+\cos x_1+\cos x_2=a\pi+\cos x_1+\cos(\pi-x_1)=a\pi$. ………… 4 分

(2) $f(x)\leqslant\frac{1}{2}ax^2+e^x$ 即 $\frac{1}{2}ax^2-ax+e^x-\cos x\geqslant 0$.

设 $g(x)=\frac{1}{2}ax^2-ax+e^x-\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，

则 $g'(x)=ax-a+e^x+\sin x$，$g''(x)=a+e^x+\cos x$. ……………………………………… 5 分

①当 $a>1$ 时，$g''(x)=a-e^x+\cos x>0$，所以 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g'(0)=1-a<0$，$g'(1)=e+\sin 1>0$，所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $g'(x_0)=0$，………… 6 分

所以，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以，$g(x_0)<g(0)=0$，不合题意. …………………………………………………………… 7 分

②当 $a=1$ 时，$g''(x)=1+e^x+\cos x>0$，所以 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g'(0)=0$，………………………………………………………………………………… 8 分

所以，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以，$g(x)\geqslant g(0)=0$，符合题意. ……………………………………………………… 9 分

③当 $0<a<1$ 时，$g''(x)=a+e^x+\cos x$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增.

又 $g''(-1)=a+\frac{1}{e}+\cos 1>0$，所以 $g''(x)>g''(-1)>0$

所以 $g'(x)=ax-a-e^x+\sin x$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增.

又 $g'(0)=1-a>0$，$g'(-1)=-2a+\frac{1}{e}-\sin 1<-2a+\frac{1}{e}-\sin\frac{\pi}{4}=-2a+\frac{1}{e}-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$，

所以 $\exists m\in(-1,0)$，使得 $g'(m)=0$，…………………………………………………… 10 分

所以，当 $x\in(m,0)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以，$g(m)<g(0)=0$，不合题意. ……………………………………………………… 11 分

综上，正实数 a 的取值集合是 $\{1\}$. ………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。