河西区 2022—2023 学年度第二学期高三年级总复习质量调查（一）

数学试题参考答案及评分标准

一. 选择题：每小题 5 分，满分 45 分.

(1) A　(2) B　(3) C　(4) B　(5) D

(6) C　(7) A　(8) D　(9) B

二. 填空题：每小题 5 分，满分 30 分.

(10) $1+5i$　(11) 70　(12) $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

(13) $\frac{8}{15},\frac{8}{9}$　(14) $\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$；$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(15) $(0,1]$

三. 解答题

(16) 满分 14 分.

(Ⅰ) 解：在 ΔABC 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $b\sin A=a\sin B$，又由 $b\sin A=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，得 $a\sin B=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，即 $\sin B=\cos(B-\frac{\pi}{6})$，可得 $\tan B=\sqrt{3}$．又因为 $B\in(0,\pi)$，可得 $B=\frac{\pi}{3}$．…………5 分

(Ⅱ) (ⅰ) 解：在 ΔABC 中，由余弦定理及 $a=2,c=3,B=\frac{\pi}{3}$，有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故 $b=\sqrt{7}$．…………7 分

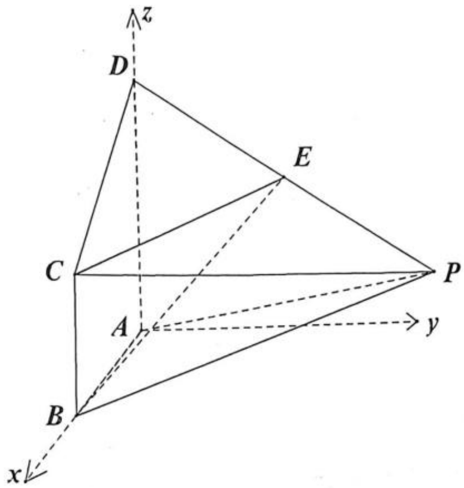
(ⅱ) 解：由 $b\sin A=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．因为 $a<c$，故 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}}$．因此 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{1}{7}$.

所以，$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$. …………14 分

（17）满分 15 分.

以点 A 为坐标原点，以 AB,AD 所在直线分别为 x,z 轴，以与 AB 垂直的直线为 y 轴，建立如下图所示的空间直角坐标系.

则 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,0,1),D(0,0,2)$，$P(-1,\sqrt{3},0),E(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$. …………2 分



（Ⅰ）证明：所以 $\overrightarrow{CE}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$

因为，易知平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$

所以 $\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0$

所以 $\overrightarrow{CE}\perp\boldsymbol{n}$，由因为 $CE\not\subset$ 平面 PAB

所以直线 CE // 平面 PAB. …………6 分

（Ⅱ）解：因为 $\overrightarrow{CE}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，

$\overrightarrow{CD}=(-1,0,1)$，设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 PCD 的法向量

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-x+z=0\end{cases}$，不妨设 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$

因为 $\overrightarrow{BE}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$ 设直线 BE 与平面 PCD 所成角为 θ

则 $\sin\theta=\left|\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{BE}>\right|=\dfrac{\left|-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+1\right|}{\sqrt{5}\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

所以直线 BE 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$. …………10 分

（Ⅲ）设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n_0}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=z=0 \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=-x+\sqrt{3}y=0 \end{cases}$，不妨设 $\boldsymbol{n_0}=(3,\sqrt{3},0)$

又因为平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$

设平面 PCD 与平面 PAD 的夹角为 φ

则 $\cos\varphi=\left|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n_0}>\right|=\dfrac{|3+3+0|}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

所以平面 PCD 与平面 PAB 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. …………15 分

（18）满分 15 分.

（Ⅰ）解：由题意左顶点为 A 与上顶点为 B 的距离为 $\sqrt{4+b^2}=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，

所以 $c=\sqrt{2}$，得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，焦点坐标为 $(\pm\sqrt{2},0)$. …………5 分

（Ⅱ）解：由已知 $A(-2,0)$，设 AP 的方程为 $y=k(x+2)$，$k\neq 0$，带入椭圆方程并

整理得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$，由 $x=-2$ 是此方程的一个解得

$x_P=-\dfrac{4k^2-2}{1+2k^2}$，所以 $y_P=\dfrac{4k}{1+2k^2}$，AP 的中点坐标为 $\left(-\dfrac{4k^2}{1+2k^2},\dfrac{2k}{1+2k^2}\right)$，

AP 的垂直平分线方程为 $y-\dfrac{2k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{4k^2}{1+2k^2}\right)$，令 $x=0$，得 $y_Q=-\dfrac{2k}{1+2k^2}$，

ΔPAQ 为等边三角形，则 $AP=AQ$，

所以 $\left(-\dfrac{4k^2-2}{1+2k^2}+2\right)^2+\left(\dfrac{4k}{1+2k^2}\right)^2=(-2)^2+\left(-\dfrac{2k}{1+2k^2}\right)^2$，

解得 $k^2=\dfrac{3}{4}$，所以 $x_P=-\dfrac{4\times\frac{3}{4}-2}{1+2\times\frac{3}{4}}=-\dfrac{2}{5}$. …………15 分

（19）满分15分.

（Ⅰ）解：由数列$\{a_n\}$是公差d为1的等差数列，其前7项的和为$\frac{49}{2}$，

可得$7a_1+\frac{1}{2}7\times 6d=\frac{49}{2}$，解得$a_1=\frac{1}{2}$，所以$a_n=\frac{1}{2}+(n-1)=\frac{2n-1}{2}$ $(n\in N^*)$；

由数列$\{b_n\}$是等比数列，$b_1=\frac{1}{2}$，$b_3-b_2=-\frac{1}{8}$，可得$4q^2-4q=-1$，解得$q=\frac{1}{2}$，

所以$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(n\in N^*)$. …………4分

（Ⅱ）解：因为$a_n=\frac{2n-1}{2}$，$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以$c_n=\frac{1}{b_{2n}}+b_n=2^{2n}+\frac{1}{2^n}$，

则$c_n^{\ 2}-c_{2n}=\left(2^{2n}+\frac{1}{2^n}\right)^2-\left(2^{4n}+\frac{1}{2^{2n}}\right)=2^{n+1}$. …………7分

（Ⅲ）解：因为

$\left[a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1}\right]\cdot\left(c_{2k-1}^2-c_{2(2k-1)}\right)+\left[a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k}\right]\cdot\left(c_{2k}^2-c_{2(2k)}\right)=k4^{k+1}$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{2n}\left[a_{k+1}-(-1)^k a_k\right]\cdot\left(c_k^2-c_{2k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot 4^{k+1}$

设$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot 4^{k+1}$，则$T_n=1\times 4^2+2\times 4^3+\cdots+n\times 4^{n+1}$①，

所以$4T_n=1\times 4^3+2\times 4^4+\cdots+n\times 4^{n+2}$②，①-②，得：

$$-3T_n=\left(4^2+4^3+\cdots+4^{n+1}\right)-n\cdot 4^{n+2}=\frac{4^2\left(1-4^n\right)}{1-4}-n\cdot 4^{n+2}=\frac{(1-3n)4^{n+2}-16}{3}$$

所以$T_n=\frac{(3n-1)4^{n+2}+16}{9}$，

即$\sum\limits_{k=1}^{2n}\left[a_{k+1}-(-1)^k a_k\right]\cdot\left(c_k^2-c_{2k}\right)=\frac{(3n-1)4^{n+2}+16}{9}$. …………15分

(20) 满分 16 分.

(Ⅰ)(ⅰ)解：当 $a=1$ 时，$f(x)=2\ln x-x+1$，$x\in(0,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{2}{x}-1$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$.

当 x 变化时 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$；$f(x)$ 的极大值为

$f(2)=2\ln 2-1$，无极小值. …………4 分

(ⅱ)解：由(ⅰ)可知当 $f(e)=2\ln e-e+1=3-e$，$f'(e)=\dfrac{2}{e}-1$. 则所求切线方程为 $y-(3-e)=\left(\dfrac{2}{e}-1\right)(x-e)$，即 $y=\left(\dfrac{2}{e}-1\right)x+1$. …………6 分

(Ⅱ)由已知可得，方程 $2a\ln x-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2-x+a+\dfrac{1}{2}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个不等实根，设 $h(x)=2a\ln x-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2-x+a+\dfrac{1}{2}$，则函数 $h(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$ 且 $h(1)=0$，

$h'(x)=\dfrac{2a}{x}-(2a-1)x-1=\dfrac{[(1-2a)x-2a](x-1)}{x}$.

当 $1-2a\le 0$，即 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 时，

若 $0<x<1$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；若 $x>1$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，
所以 $h(x)<h(1)=0$，则所求方程只有一个解 $x=1$，不符合题意，舍去.

当 $1-2a>0$，即 $a<\dfrac{1}{2}$ 时. $h'(x)=\dfrac{(1-2a)}{x}\left(x-\dfrac{2a}{1-2a}\right)(x-1)$，

①当 $\dfrac{2a}{1-2a}\le 0$，即 $a\le 0$ 时，

若 $0<x<1$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；若 $x>1$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，
所以 $h(x)>h(1)=0$，则所求方程只有一个解 $x=1$，不符合题意，舍去；

②当$\frac{2a}{1-2a}=1$，即 $a=\frac{1}{4}$时，若 $x>0$，则 $h'(x)\geq 0$，$h(x)$为增函数，

又 $h(1)=0$，则所求方程只有一个解 $x=1$，不符合题意，舍去；

③当 $0<\frac{2a}{1-2a}<1$，即 $0<a<\frac{1}{4}$时，

若 $0<x<\frac{2a}{1-2a}$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

若$\frac{2a}{1-2a}<x<1$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；

若 $x>1$，则 $h'(x)>0$ $h(x)$单调递增.

又 $h(1)=0$，可知 $h\left(\frac{2a}{1-2a}\right)>0$.

因为 $h\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)=2a\ln e^{-\frac{1}{a}}-e^{-\frac{1}{a}}+a-\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\frac{1}{2}$

$=-\frac{3}{2}-e^{-\frac{1}{a}}+a+\left(\frac{1}{2}-a\right)\frac{1}{e}$

因为 $0<a<\frac{1}{4}$，所以

$-\frac{3}{2}-e^{-\frac{1}{a}}+a+\left(\frac{1}{2}-a\right)\frac{1}{e}<-\frac{5}{4}+\left(\frac{1}{2}-a\right)\frac{1}{e}<-\frac{5}{4}+1<0$，即 $h\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)<0$.

因为 $x\in\left(\frac{2a}{1-2a},1\right)$时，$h(x)>0$，因为 $e^{-\frac{1}{a}}<1$，所以 $e^{-\frac{1}{a}}\in\left(0,\frac{2a}{1-2a}\right)$，

所以 $h(x)$在区间$\left(e^{-\frac{1}{a}},\frac{2a}{1-2a}\right)$单调递增，由零点存在定理，

得存在唯一 $x_0\in\left(e^{-\frac{1}{a}},\frac{2a}{1-2a}\right)$，使得 $h(x_0)=0$，又 $h(1)=0$

此时，所求方程有 2 个不同解，符合题意.

④当$\frac{2a}{1-2a}>1$，即$\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$时，

若 $0<x<1$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；若 $1<x<\frac{2a}{1-2a}$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；若 $x>\frac{2a}{1-2a}$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$单调递增.

又 $h(1)=0$，于是 $h\left(\frac{2a}{1-2a}\right)<0$，令 $m(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，$m'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，$m(x)$在区间$(0,1)$上单调递减，在区间$(1,+\infty)$上单调递增，

所以 $m(x)\geq m(1)=0$，所以 $\ln x\geq 1-\dfrac{1}{x}$，

所以 $h(x)=2a\ln x-x+a-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2+\dfrac{1}{2}\geq 2a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)-x+a-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2+\dfrac{1}{2}$

$=\left(\dfrac{1}{2}-a\right)x^2-x-\dfrac{2a}{x}+3a+\dfrac{1}{2}=n(x)$，

$$n\left(\frac{6a}{1-2a}\right)=\frac{1-2a}{2}\cdot\frac{36a^2}{(1-2a)^2}-\frac{6a}{1-2a}-\frac{-\frac{2a}{6a}}{1-2a}+3a+\frac{1}{2}=\frac{(8a-1)^2}{6(1-2a)},$$

因为 $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$，所以 $1-2a>0,(8a-1)^2>0$，$h\left(\dfrac{6a}{1-2a}\right)\geq n\left(\dfrac{6a}{1-2a}\right)>0$

因为 $h(x)$ 在 $\left(\dfrac{2a}{1-2a},+\infty\right)$ 上单调递增，由零点存在定理，得存在唯一 $x_1\in\left(\dfrac{2a}{1-2a},+\infty\right)$，

使得 $h(x_1)=0$，又 $h(1)=0$.

此时，所求方程有 2 个不同解，符合题意.

综上所述，当 $a\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ 时，函数 $h(x)$ 有两个不同零点. …………16 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。