

洛阳市 2022—2023 学年高一质量检测

数 学 试 卷

本试卷共 4 页,共 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上。
2. 考试结束,将答题卡交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内,点 $P(-1,2)$ 对应的复数的模等于

A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

2. 已知集合 $A = \{-1,0,1,2,3\}$, $B = \{x \mid \sqrt{2^x - 1} < 3\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{-1,0,1,2,3\}$ B. $\{-1,0,1,2\}$ C. $\{0,1,2\}$ D. $\{0,1,2,3\}$

3. $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} =$

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

4. 已知 m, n 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是

A. 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $m \parallel \alpha, m \perp n$, 则 $n \parallel \alpha$
C. 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \parallel n$

5. 从 A 班随机抽一名学生是女生的概率是 $\frac{1}{3}$, 从 B 班随机抽一名学生是女生的概率

是 $\frac{1}{2}$, 现从两个班各随机抽一名学生, 那么两名学生不全是女生的概率是

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

6. 已知 $f(x) = \frac{e^x}{e^{ax} + 1}$ 是偶函数, 则 $a =$

A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

7. 如图, 二面角 $\alpha - l - \beta$ 为 60° , $A \in \alpha, B \in \beta$, 点 A, B 在棱 l 上的射影分别是 A_1, B_1 ,

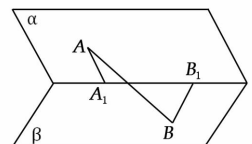
若 $AA_1 = 1, BB_1 = 2, A_1B_1 = 2$, 则 AB 长度为

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{7}$



8. 已知单位圆 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 若 $A = \frac{\pi}{4}$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 的最大值为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 1

D. $\sqrt{2}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目的要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某厂 7 月生产 A 型、B 型产品共 900 件, 其中 A 型 400 件. 按型号进行分层, 用分层随机抽样的方法, 从 7 月产品中抽取一个容量为 45 的样本, 如果样本按比例分配, 下列说法中正确的有

A. 应抽取的 A 型产品件数为 20

B. 应抽取的 B 型产品件数为 25

C. 应抽取的 A 型产品件数为 25

D. 应抽取的 B 型产品件数为 20

10. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的图象的一条对称轴为直线 $x = -\frac{5}{12}\pi$

B. $f(x)$ 在 $[-\pi, -\frac{2}{3}\pi]$ 上单调递增

C. $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x) = \cos 2x$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到

D. 函数 $y = f(x + \frac{\pi}{12})$ 是奇函数

11. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 A_1D_1, AA_1 的中点, 则下列结论正确的是

A. $MN \parallel$ 平面 DBC_1

B. 平面 C_1MN 截正方体所得截面为等腰梯形

C. $MN \perp D_1C$

D. 异面直线 MN 与 BD_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(x) = f(2-x)$, $f(-x) = -f(x-2)$, 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = -x^2 + 1$. 则下列说法正确的是
- A. $f(2023) = 1$
- B. $y = f(x+5)$ 为偶函数
- C. 当 $x \in [-4, -2]$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $[-1, 0]$
- D. 函数 $y = f(x)$ 与 $y = \lg(x+1)$ 图象仅有 5 个不同的交点

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $8^{\frac{2}{3}} - (-2023)^0 + [(-2)^2]^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6 中任取两个不同的数, 则这两个数的积为奇数的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 已知实数 M, N 满足 $\lg M + \lg N = \lg(M+N)$, 则 $M+N$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 4$, $\cos \angle ACB = \frac{1}{3}$, 若三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 52π , 则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程及演算步骤.

17. (10 分)

已知复数 $z = 1 + bi$ ($b \in \mathbf{R}$), 且 $(2+i)z$ 为纯虚数.

- (1) 求 b ;
- (2) 设复数 z_1 满足 $z_1 z = a + i$, 且复数 z_1 对应的点在第二象限, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分)

已知向量 $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ 满足: $|\mathbf{m}| = 2$, $\mathbf{p} = \mathbf{m} + t\mathbf{n}$ ($t \in \mathbf{R}$), $\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\pi}{3}$.

- (1) 若 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 2$, 求向量 $\mathbf{n}$ 在向量 $\mathbf{m}$ 方向上的投影向量;
- (2) 求 $|\mathbf{p}|$ 的最小值.

19. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $(b+c)\cos A = a(\cos B + \cos C)$.

- (1) 求 A ;
- (2) 若角 A 的平分线与 BC 交于点 D , 且 $AD = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12 分)

某单位组织一场党史知识竞赛活动,随机抽取 100 名员工的成绩作为样本进行统计,得到如图所示频率分布表:

分组	频率
$[40,50)$	0.05
$[50,60)$	0.15
$[60,70)$	0.25
$[70,80)$	0.3
$[80,90)$	0.2
$[90,100]$	0.05

(1) 求样本成绩的第 80 百分位数;

(2) 试利用表格中数据估算这次党史知识竞赛的平均成绩;

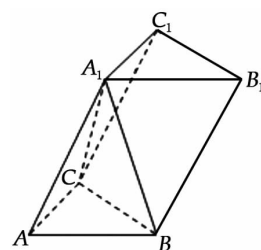
(3) 已知样本中成绩落在区间 $[90,100]$ 内的员工男女比例为 3:2,现从该样本中分数在 $[90,100]$ 的员工中随机抽出 2 人,求至少有 1 人是女员工的概率.

21. (12 分)

如图,在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$,
 $AB = AC = 2, AA_1 = A_1B = A_1C = 4$.

(1) 证明: $B_1C_1 \perp AA_1$;

(2) 求 AA_1 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.



22. (12 分)

已知函数 $g(x) = \sin^2 x - \cos x + a, x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 有两个零点.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $g(x)$ 的两个零点,证明: $x_1 + x_2 < \frac{3\pi}{2}$.