2022—2023 学年高一年级阶段性测试(四)

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　D

　命题意图　本题考查复数的运算及几何意义.

　解析　因为 $z=\frac{4}{1+i}=\frac{4(1-i)}{(1-i)(1+i)}=2-2i$,所以其在复平面内对应的点在第四象限.

2. 答案　D

　命题意图　本题考查空间线面位置关系.

　解析　若 $m/\!/\alpha$ 且 $n/\!/\alpha$,则 m 与 n 可能平行、相交,也可能异面,故 A 错误;若 $m/\!/\alpha$ 且 $n\subset\alpha$,则 m 与 n 可能平行,也可能异面,故 B 错误;若 $m/\!/\alpha$ 且 $m/\!/\beta$,则 α 与 β 可能相交,也可能平行,故 C 错误;因为垂直于同一直线的两个平面互相平行,故 D 正确.

3. 答案　C

　命题意图　本题考查圆锥的性质及侧面积的计算.

　解析　设圆锥的底面半径为 r,高为 h,由圆锥的母线长为 2,可知圆锥的侧面积为 $\pi r\cdot 2=2\pi r$,又圆锥的轴截面面积为$\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot h=rh$,所以 $2\pi r=4rh$,解得 $h=\frac{\pi}{2}$,所以该圆锥的高为$\frac{\pi}{2}$.

4. 答案　A

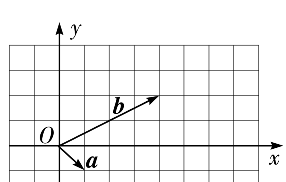
　命题意图　本题考查倍角公式及正、余弦定理的应用.

　解析　因为 $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{c-b}{2c}$,所以$\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1}{2}-\frac{b}{2c}$,所以 $\cos A=\frac{b}{c}$,再由余弦定理可知$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c}$,所以 $b^2+c^2-a^2=2b^2$,即 $a^2+b^2=c^2$,所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

5. 答案　C

　命题意图　本题考查向量的数量积.

　解析　如图建立平面直角坐标系,则 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$,$\boldsymbol{b}=(4,2)$,所以 $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}=(4,2)-2(1,-1)=(2,4)$. 所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})=1\times 2-1\times 4=-2$.



6. 答案　A

　命题意图　本题考查数学文化及复数的模.

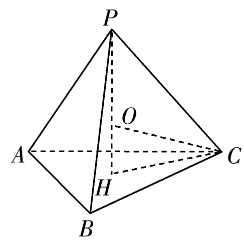
　解析　在 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 中,令 $\theta=\pi$,得 $e^{i\pi}=-1$,所以 $e^{i\pi}-i=-1-i$,所以 $z=\frac{1}{-1-i}=\frac{-1+i}{(-1-i)(-1+i)}=$

$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,所以$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. **答案** B

命题意图 本题考查简单几何体的性质及三棱锥的外接球的表面积.

解析 由已知可得 $P-ABC$ 是正三棱锥,设 PH 是正三棱锥 $P-ABC$ 的高,易知外接球球心 O 在 PH 上,如图. 设外接球的半径为 R,由题可知 $CH=\sqrt{3}$,则 $PH=\sqrt{PC^2-CH^2}=3$. 由 $OC^2=OH^2+CH^2$ 得 $R^2=(3-R)^2+(\sqrt{3})^2$,解得 $R=2$,所以外接球的表面积为 $S=4\pi\times2^2=16\pi$.



8. **答案** D

命题意图 本题考查空间垂直关系以及简单几何体的体积.

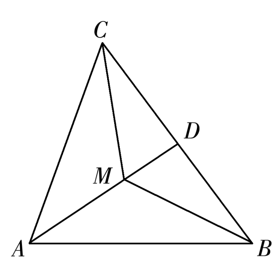
解析 过点 A 作 $AE\perp BD$ 于 E,连接 PE. $\because PA\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,$\therefore PA\perp BD$,又 $PA\cap AE=A$,$\therefore BD\perp$平面 PAE,$\therefore BD\perp PE$. 由 $AE\cdot BD=AB\cdot AD$ 可得 $AE=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$,而 $PE=\sqrt{PA^2+AE^2}=\frac{13}{5}$,$\therefore S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}BD\cdot PE=\frac{13}{2}$. 设点 A 到平面 PBD 的距离为 h,由 $V_{P-ABD}=V_{A-PBD}$ 可得$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times1=\frac{1}{3}\times S_{\triangle PBD}\times h$,解得 $h=\frac{12}{13}$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案** ABC

命题意图 本题考查向量的线性运算.

解析 如图,根据向量加法的平行四边形法则易得$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$,故 A 正确;由题意得 M 为线段 AD 的靠近 D 点的三等分点,所以$\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MD}$,又$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,故 B 正确;$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$,故 C 正确;$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$,又$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$,故 D 错误.



10. **答案** BC

命题意图 本题考查复数的概念、复数的运算及复数的几何意义.

解析 由题可知$|z_1|=\sqrt{5}<|z_2|=5$,故 A 错误;$z_1z_2=(1+2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=3-4\mathrm{i}+6\mathrm{i}+8=11+2\mathrm{i}$,故复数 z_1z_2 的虚部为 2,故 B 正确;复数 z_1z_2 在复平面内所对应的点为$(11,2)$,位于第一象限,z_1 在复平面内所对应的点(1,

2)也位于第一象限,故 C 正确;复数 z_2 在复平面内对应的点为$(3,-4)$,因为当 $x=3$ 时,$y=2\times3-2=4$,所以复数 z_2 在复平面内对应的点不在函数 $y=2x-2$ 的图象上,故 D 错误.

11. **答案** AD

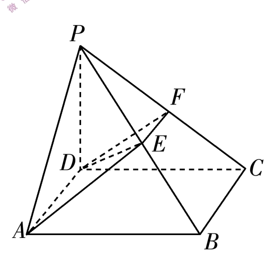
命题意图 本题考查正弦定理及余弦定理的综合运用.

解析 由 $\sin A>\sin B$,利用正弦定理可得 $a>b$,$\therefore 0<B<A<\pi$,而 $y=\cos x$ 在$(0,\pi)$上单调递减,$\therefore \cos A<\cos B$,故 A 正确;在锐角$\triangle ABC$ 中,$A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$A+B>\frac{\pi}{2}$,$\therefore \frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B>0$,$\therefore \sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$,因此不等式 $\sin A>\cos B$ 恒成立,故 B 错误;由 $a\cos B=b\cos A$,利用正弦定理可得 $\sin A\cos B=\sin B\cos A$,$\therefore \sin(A-B)=0$,$\because A,B\in(0,\pi)$,$\therefore A-B=0$,即 $A=B$,$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形,不一定是等边三角形,故 C 错误;由于 $A=\frac{\pi}{3}$,$a^2=bc$,由余弦定理可得 $a^2=bc=b^2+c^2-bc$,可得$(b-c)^2=0$,解得 $b=c$,$\therefore A=C=B=\frac{\pi}{3}$,故 D 正确.

12. **答案** BD

命题意图 本题考查空间线面位置关系、异面直线所成的角及几何体的体积.

解析 如图,取棱 PC 的中点 F,连接 EF,DF,则 $AD/\!/EF$,即 A,D,E,F 四点共面,则 l 为直线 EF,因为 $AD/\!/EF$,$AD\subset$平面 PAD,$EF\not\subset$平面 PAD,所以 $EF/\!/$平面 PAD,即 $l/\!/$平面 PAD,故 A 错误;由 $PD\perp$底面 $ABCD$,$PD=AD$,可得$\triangle PDC$ 为等腰直角三角形,而斜边 PC 的中点为 F,所以 $PC\perp DF$,再由底面 $ABCD$ 是正方形,易得 $AD\perp$平面 PDC,所以 $AD\perp PC$,又 $AD\cap DF=D$,所以 $PC\perp$平面 $ADFE$,又 $DE\subset$平面 $ADFE$,所以 $PC\perp DE$,故 B 正确;直线 PA 与 l 所成的角,即 PA 与 AD 所成的角,由 $PD\perp$底面 $ABCD$,可得 $PD\perp AD$,$\cos\angle PAD=\frac{AD}{AP}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 C 错误;$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}PD\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times1\times1=\frac{1}{3}$,$V_{P-AEFD}=\frac{1}{3}PF\cdot S_{AEFD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{8}$,所以 $V_{ABCDFE}=V_{P-ABCD}-V_{P-AEFD}=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$,所以$\frac{V_{P-AEFD}}{V_{ABCDFE}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{24}}=\frac{3}{5}$,故 D 正确.



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** 1

命题意图 本题考查复数的运算.

解析 $\because \frac{a-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(a-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{a-1}{2}+\frac{-1-a}{2}\mathrm{i}$,且该复数为纯虚数,$\therefore \frac{a-1}{2}=0$,且$\frac{-1-a}{2}\neq0$,解得 $a=1$.

14. **答案** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

命题意图 本题考查向量垂直的定义以及向量的数量积.

解析 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ. 由已知得 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,t)$, $\because (3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\therefore t^2-2=0$, 即 $t^2=2$, $\therefore \cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-1+2t^2}{\sqrt{1^2+t^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(2t)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

15. **答案** $\dfrac{6}{25}$

命题意图 本题考查棱台的体积及二面角的计算.

解析 由题意知挖出的土的体积 $V=837.5\times\dfrac{1}{2}\times(10+6)\times2=13\ 400$, 则由 $\dfrac{1}{3}\times(70^2+70b+b^2)\times6=13\ 400$, 整理得 $b^2+70b-1\ 800=0$, $\therefore b=20$ 或 $b=-90$(舍去). 设侧面与下底面所成的二面角大小为 α, 则 $\tan\alpha=\dfrac{h}{\frac{a-b}{2}}=\dfrac{6}{\frac{70-20}{2}}=\dfrac{6}{25}$.

16. **答案** $\sqrt{7}$

命题意图 本题考查解三角形.

解析 由正弦定理可得 $\sin\angle ACB\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B\sin\angle ACB-\sin A=0$. 又在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A=\sin(B+\angle ACB)$, $\therefore \sin\angle ACB\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B\sin\angle ACB=\sin(B+\angle ACB)=\sin B\cos\angle ACB+\cos B\sin\angle ACB$, $\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B\sin\angle ACB=\sin B\cos\angle ACB$. $\because \sin B>0$, $\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\angle ACB=\cos\angle ACB$, $\therefore \tan\angle ACB=\sqrt{3}$, $\because \angle ACB\in(0,\pi)$, $\therefore \angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$. 由点 D 为 AB 的中点, $\sqrt{3}BC=2BD$, 得 $\sqrt{3}BC=AB$, 又 $BC=2$, $\therefore AB=c=2\sqrt{3}$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $\cos\angle ACB=\dfrac{2^2+b^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\times b}=\dfrac{1}{2}$, 解得 $b=4$ 或 $b=-2$(舍去). $\because a^2+c^2=b^2$, $\therefore B=\dfrac{\pi}{2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中, $\because BC=2$, $BD=\sqrt{3}$, $BD^2+BC^2=CD^2$, $\therefore CD=\sqrt{7}$.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查复数的运算及复数的几何意义.

解析 (Ⅰ)因为 $z=a-\mathrm{i}(a>0)$,

所以 $z+\dfrac{2}{z}=a-\mathrm{i}+\dfrac{2}{a-\mathrm{i}}=a-\mathrm{i}+\dfrac{2(a+\mathrm{i})}{(a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}=a-\mathrm{i}+\dfrac{2(a+\mathrm{i})}{a^2+1}=\left(a+\dfrac{2a}{a^2+1}\right)+\left(\dfrac{2}{a^2+1}-1\right)\mathrm{i}$. …… (3 分)

由于复数 $z+\dfrac{2}{z}$ 为实数, 所以 $\dfrac{2}{a^2+1}-1=0$,

又因为 $a>0$, 所以 $a=1$,

因此 $z=1-\mathrm{i}$. …… (5 分)

(Ⅱ)由题意 $(m-z)^2=(m-1+\mathrm{i})^2$

$=(m-1)^2-1+2(m-1)\mathrm{i}$

$=(m^2-2m)+2(m-1)\mathrm{i}$. …… (7 分)

由于复数 $(m-z)^2$ 在复平面内对应的点在第二象限,

所以 $\begin{cases} m^2-2m<0, \\ 2(m-1)>0, \end{cases}$ 解得 $1<m<2$,

因此实数 m 的取值范围是 $(1,2)$. ……………………………………………………………………………… (10 分)

18. **命题意图** 本题考查向量共线及垂直的定义.

解析 (Ⅰ)由 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$,得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$, ……………………………………………… (2 分)

又 $|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{5}$,所以 $|\boldsymbol{c}|=2|\boldsymbol{a}|$. ………………………………………………………………………… (3 分)

因为 $\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{c}=\pm 2\boldsymbol{a}$, ………………………………………………………………………………… (4 分)

所以 $\boldsymbol{c}=(2,-4)$ 或 $\boldsymbol{c}=(-2,4)$. …………………………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 垂直,所以 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$,

即 $2|\boldsymbol{a}|^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=0$. ……………………………………………………………………… (8 分)

将 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$, $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{5}$ 代入,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-10$. ……………………………………………………… (9 分)

所以 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=-1$. ……………………………………………………………………… (10 分)

又 $\theta\in[0,\pi]$,得 $\theta=\pi$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 π. …………………………………………………… (12 分)

19. **命题意图** 本题考查正弦定理及余弦定理的应用.

解析 (Ⅰ)由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin B\cos A=\sin C$, …………………………………………… (1 分)

因为 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin A\cos B$. ……………………………………………………………………………… (3 分)

因为 $\sin A\neq 0$,所以 $\sqrt{3}\sin B=\cos B$,

显然 $\cos B\neq 0$,则 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ……………………………………………………………………………… (5 分)

又 $0<B<\pi$,所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$. ………………………………………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由余弦定理可得 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$, ………………………………………………………………… (7 分)

因为 $a=\sqrt{3}c$, $b=2$,

所以 $4=c^2+3c^2-2\sqrt{3}c^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $c^2=4$,解得 $c=2$ 或 $c=-2$(舍去). ………………………………………………………………………… (9 分)

所以 $a=2\sqrt{3}$, ……………………………………………………………………………………………………… (10 分)

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$. ……………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查线线垂直的证明、三棱锥体积的计算及线面角的余弦值的求解.

解析 (Ⅰ)$\because$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,

$\therefore$ 平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABC. …………………………………………………………………………… (1 分)

$\because AC=6, BC=8, AB=10$,

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$, $\therefore AC\perp BC$. ………………………………………………………………………… (2 分)

$\because$ 平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $ABC=BC$,

$\therefore AC\perp$ 平面 BCC_1B_1. …………………………………………………………………………………………… (3 分)

又 $B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1,

$\therefore AC \perp B_1C$. ······ (4 分)

(Ⅱ)$\because$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,

$\therefore$ 点 E 到平面 ABC 的距离即 AA_1 的长,为 5. ······ (5 分)

$\because D$ 是 AB 的中点,$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 6\times 8=12$, ······ (6 分)

$\therefore V_{B-ECD}=V_{E-BCD}=\frac{1}{3}\times 12\times 5=20$. ······ (8 分)

(Ⅲ)由(Ⅰ)知 $AC\perp$ 平面 BB_1C_1C,

$\therefore \angle AC_1C$ 为直线 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角. ······ (9 分)

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACC_1$ 中,$AC=6$,$CC_1=AA_1=5$,

$\therefore AC_1=\sqrt{AC^2+C_1C^2}=\sqrt{61}$, ······ (10 分)

$\therefore \cos\angle AC_1C=\frac{CC_1}{AC_1}=\frac{5}{\sqrt{61}}=\frac{5\sqrt{61}}{61}$,

即直线 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的余弦值为$\frac{5\sqrt{61}}{61}$. ······ (12 分)

21. **命题意图** 本题考查线面平行及线面垂直的证明.

解析 (Ⅰ)如图,设 AC 与 BD 交于点 O,则 O 为正方形 $ABCD$ 的中心,连接 OE,不妨令 $AB=\sqrt{2}$.

则 $DE=EF=1$. ······ (2 分)

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,$\therefore BD=\sqrt{2}AB=2=2BO$.

$\because EF/\!/$平面 $ABCD$,且平面 $ABCD\cap$平面 $BDEF=BD$,

$\therefore EF/\!/BD$,

$\therefore EF/\!/OB$,$EF=OB$,即四边形 $BOEF$ 为平行四边形,

$\therefore OE/\!/BF$. ······ (4 分)

又 $OE\subset$平面 AEC,$BF\not\subset$平面 AEC,

$\therefore BF/\!/$平面 AEC. ······ (6 分)

(Ⅱ)连接 OF.

$\because EF \underline{\underline{/\!/}} DO$,$DE=EF$,$\therefore$ 四边形 $ODEF$ 为菱形.

$\because DE\perp$平面 $ABCD$,

$\therefore$ 四边形 $ODEF$ 为正方形,$\therefore DF\perp OE$. ······ (8 分)

又四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore BD\perp AC$.

$\because DE\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,

$\therefore DE\perp AC$. ······ (9 分)

而 $BD\cap DE=D$,且 $BD\subset$平面 $BDEF$,$DE\subset$平面 $BDEF$,

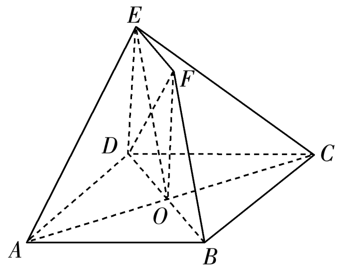
$\therefore AC\perp$平面 $BDEF$.

$\because DF\subset$平面 $BDEF$,

$\therefore AC\perp DF$. ······ (11 分)

又 $OE\cap AC=O$，OE，$AC\subset$平面 AEC，

$\therefore DF\perp$平面 AEC. ……………………………………………………………………………………………（12 分）



22. **命题意图** 本题考查正余弦定理的应用及三角恒等变换.

解析 （Ⅰ）由 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$ 可得 $b\cos A+(a-\sqrt{2}c)\cos B=0$， ……………………………………（1 分）

再由正弦定理可得 $\sin B\cos A+(\sin A-\sqrt{2}\sin C)\cos B=0$，

即$\sqrt{2}\sin C\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)$. ……………………………………（3 分）

因为 $A+B=\pi-C$，

所以$\sqrt{2}\sin C\cos B=\sin C$，

又 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………………………………………（4 分）

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$. ……………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）设$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，由（Ⅰ）可得 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=2\sqrt{2}$，

所以 $a=2R\sin A=2\sqrt{2}\sin A$，$c=2R\sin C=2\sqrt{2}\sin C$， ……………………………………（7 分）

所以$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\sin A\cdot 2\sqrt{2}\sin C\cdot\sin B$

$=2\sqrt{2}\sin A\sin C$

$=2\sqrt{2}\sin A\sin(A+B)$

$=2\sqrt{2}\sin A\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin A\left(\sin A\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\cos A\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2\sin^2 A+2\sin A\cos A$

$=2\times\dfrac{1-\cos 2A}{2}+\sin 2A$

$=1+\sin 2A-\cos 2A$

$=1+\sqrt{2}\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{4}\right)$. ……………………………………………………………（9 分）

因为$\triangle ABC$ 为锐角三角形且 $B=\dfrac{\pi}{4}$，

所以$\begin{cases} A+C=\frac{3\pi}{4}, \\ 0<A<\frac{\pi}{2}, \\ 0<C<\frac{\pi}{2}, \end{cases}$解得$\frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{2}$,

所以$\frac{\pi}{4}<2A-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$, …………………………………………………………………………（10 分）

所以$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(2A-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$,

从而$2<1+\sqrt{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1+\sqrt{2}$,

即$\triangle ABC$的面积的取值范围为$(2,1+\sqrt{2}]$. ……………………………………………………………（12 分）