

数 学(理科)

做
Z S W

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{y | y = x + \frac{1}{x}, x > 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, 则 A

$\cap B =$

A. $(1, +\infty)$

B. $[2, 3)$

C. $(1, 2]$

D. $[2, +\infty)$

2. 如果一个复数的实部和虚部相等,则称这个复数为“等部复数”.

若复数 $z = (2 + ai)i$ (其中 $a \in \mathbb{R}$) 为“等部复数”,则复数 $z + ai$ 在复平面内对应的点在

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0, \\ x + y - 1 \geq 0, \\ x - 3 \leq 0. \end{cases}$ 则 $z = 2x - 3y$ 的最大值为

A. 2

B. 4

C. 8

D. 12

4. 已知 $x < -1$, 那么在下列不等式中,不成立的是

A. $x^2 - 1 > 0$

B. $x + \frac{1}{x} < -2$

C. $\cos x + x > 0$

D. $\sin x - x > 0$

5. 希伯特在 1990 年提出了孪生素数猜想:在自然数集中,孪生素数对有无穷多个,其中孪生素数是指相差 2 的素数对,即若 p 和 $p + 2$ 均是素数,素数对 $(p, p + 2)$ 称为孪生素数.从 16 以内的素数中任意取两个,其中能构成孪生素数的概率为

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{7}$

D. $\frac{3}{28}$

理科数学试题 第 1 页(共 6 页)

自主选拔在线
zizzs.com

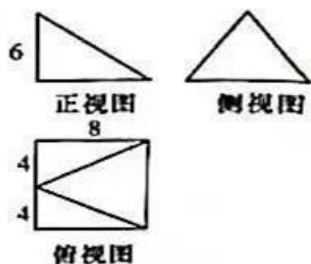
自主选拔在线
zizzs.com

6. 大衍数列来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理，数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和，是中华文化中隐藏的世界数学史上第一道数列题. 已知该数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项依次是 0, 2, 4, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, 记 $b_n = (-1)^n a_n, n \in \mathbb{N}^+$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项和是

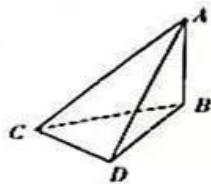
- A. 110 B. 100 C. 90 D. 80

7. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是

- A. 64
B. 128
C. 256
D. 384



8. 八一广场是南昌市的心脏地带，江西省最大的城市中心广场，八一南昌起义纪念馆为八一广场标志性建筑，塔座正面镌刻“八一南昌起义简介”碑文，东、南、西三面各有一幅反映武装起义的人物浮雕，塔身正面为“八一南昌起义纪念馆”铜胎鍍金大字，塔顶由一支直立的巨型“汉阳造”步枪和一面八一军旗组成。八一南昌起义纪念馆的建成，表达了亿万人民永远缅怀老一辈无产阶级革命家创建和培育解放军的丰功伟绩，鼓励国人进行新的长征。现某兴趣小组准备在八一广场上对八一南昌起义纪念馆的高度进行测量，并绘制出测量方案示意图，A 为纪念馆最顶端，B 为纪念馆的基座（即 B 在 A 的正下方），在广场内（与 B 在同一水平面内）选取 C、D 两点，测得 CD 的长为 m ，兴趣小组成员利用测角仪可测得的角有 $\angle ACB, \angle ACD, \angle BCD, \angle ADC, \angle BDC$ ，则根据下列各组中的测量数据，不能计算出纪念馆高度 AB 的是



- A. $m, \angle ACB, \angle BCD, \angle BDC$
B. $m, \angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$
C. $m, \angle ACB, \angle ACD, \angle ADC$
D. $m, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADC$

3. 将函数 $f(x) = \cos 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 总有 $|x_1 - x_2|$ 的最小值等于 $\frac{\pi}{6}$, 则 $\varphi =$

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

10. 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x < 0, \\ \lg x, & x > 0. \end{cases}$ $g(x) = x^2 - 4x + 1 + 2\lambda$.

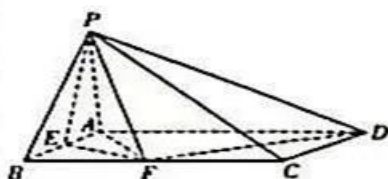
若关于 x 的方程 $f(g(x)) = \lambda$ 有 6 个解, 则 λ 的取值范围为

- A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $(0, \frac{2}{3})$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的左焦点为 F , 过点 F 的直线 l 与双曲线 C 交于 A, B 两点, 若过 A, B 和点 $M(\sqrt{7}, 0)$ 的圆的圆心在 y 轴上, 则直线 l 的斜率为

- A. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\pm \sqrt{2}$ C. ± 1 D. $\pm \frac{3}{2}$

12. 《九章算术》卷五《商功》中描述几何体“阳马”为“底面为矩形, 一棱垂直于底面的四棱锥”, 现有阳马 $P-ABCD$ (如图), $PA \perp$ 平面



$ABCD, PA=1, AB=2, AD=3$, 点 E, F 分别在 AB, BC 上, 当空间四边形 $PEFD$ 的周长最小时, 三棱锥 $P-ADF$ 外接球的表面积为

- A. 9π B. 11π
C. 12π D. 16π

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $(x-1)(2x+1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$, 则 a_2 等于_____.

14. 已知向量 $a = (2, 1), b = (1, 0), c = (1, 2)$, 若 $c \perp (a + mb)$, 则 $m =$ _____.

15. 已知 $-\frac{\pi}{2} < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}, \sin \beta + 2\cos \alpha = \sqrt{2}, 2\sin \alpha - \cos \beta = 1$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) =$ _____.

16. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x (a \in \mathbb{R})$ 的两个极值点分别为 x_1, x_2 , 若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{4e^2}{e^2 - 1} a - 2$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

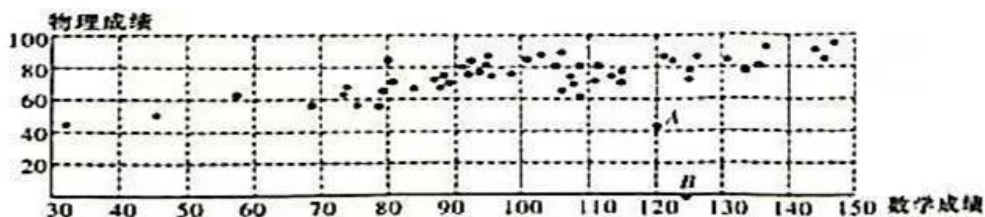
在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 16$, 点 $(a_n, a_{n+1}) (n \in \mathbb{N}^*)$ 在直线 $x - y + 3 = 0$ 上.

(1) 求数列 a_n 的通项公式;

(2) 若 $b_n = 2^n a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

基础学科招生改革试点, 也称强基计划, 强基计划是教育部开展的招生改革工作, 主要是为了选拔培养有志于服务国家重大战略需求且综合素质优秀或基础学科拔尖的学生. 聚焦高端芯片与软件、智能科技、新材料、先进制造和国家安全等关键领域以及国家人才紧缺的人文社会科学领域. 某校在一次强基计划模拟考试后, 从全体考生中随机抽取 52 名, 获取他们本次考试的数学成绩 (x) 和物理成绩 (y) , 绘制成如图散点图:



根据散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系, 但图中有两个异常点 A, B . 经调查得知, A 考生由于重感冒导致物理考试发挥失常, B 考生因故未能参加物理考试. 为了使分析结果更科学准确, 剔除这两组数据后, 对剩下的数据作处理, 得到一些统计的值: $\sum_{i=1}^{50} x_i = 5800, \sum_{i=1}^{50} y_i = 3900, \sum_{i=1}^{50} x_i y_i = 462770, \sum_{i=1}^{50} (x_i - \bar{x})^2 = 28540, \sum_{i=1}^{50} (y_i - \bar{y})^2 = 18930$, 其中 x_i, y_i 分别表示这 50 名考生的数学成绩、物理成绩, $i = 1, 2, \dots, 50$, y 与 x 的相关系数 $r \approx 0.45$.

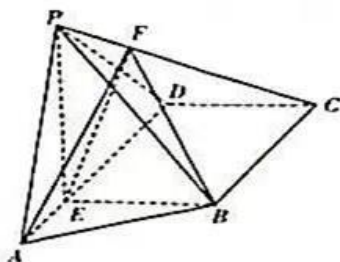
理科数学试题 第 4 页(共 6 页)

- (1)若不剔除 A, B 两名考生的数据,用 52 组数据作回归分析,设此时 y 与 x 的相关系数为 r_0 . 试判断 r_0 与 r 的大小关系(不必说明理由);
- (2)求 y 关于 x 的线性回归方程(系数精确到 0.01),并估计如果 B 考生加了这次物理考试(已知 B 考生的数学成绩为 125 分),物理成绩是多少?(精确到 0.1)

附:线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

19. (本小题满分 12 分)

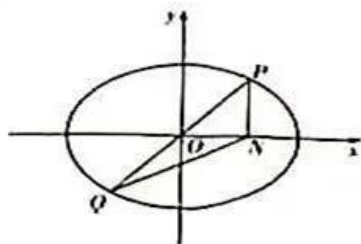
如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, E 为棱 AD 上一点, $PE \perp AD$, $PA \perp PC$, 四边形 $BCDE$ 为矩形,且 $BC = 3$, $PE = BE = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{PF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PC}$, $PA \parallel$ 平面 BEF .



- (1)求证: $PA \perp$ 平面 PCD ;
(2)求二面角 $F-AB-D$ 的大小.

20. (本小题满分 12 分)

如图,在平面直角坐标系 xOy 中,已知直线 $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 P, Q 两点(P 在 x 轴上方),且 $PQ = \frac{6}{5}a$, 设点 P 在 x 轴上的射影为点 N , $\triangle PQN$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点与椭圆 C 的焦点重合, 斜率为 k 的直线 l 过抛物线 E 的焦点与椭圆 C 交于 A, B 两点, 与抛物线 E 交于 C, D 两点.



理科数学试题 第 5 页(共 6 页)

(1)求椭圆 C 及抛物线 E 的标准方程;

(2)是否存在常数 λ , 使 $\frac{\sqrt{5}}{|AB|} + \frac{\lambda}{|CD|}$ 为常数? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x - x \cos x (0 < x < \frac{\pi}{2})$, $g(x) = f(x) + \frac{1}{2} \sin x - ax^3$.

(1) 证明: 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x)$ 有唯一零点;

(2) 若任意 $x \in [0, +\infty)$, 不等式 $g(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} + \sqrt{2}t, \\ y = \sqrt{2}t \end{cases}$ (t 为

参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴为正半轴建立极坐标, 椭圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos^2 \theta + 2\rho^2 \sin^2 \theta = 4$. 其右焦点为 F . 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点.

(1) 求 $|FA| + |FB|$ 的值;

(2) 若点 P 是椭圆上任意一点, 求 $\triangle PAB$ 的面积最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |2x-1| - |x-3|$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值 m ;

(2) 若 a, b 为正实数, 且 $a+b+2m=0$, 证明不等式 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq 5$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

