数　　学

2021.4

本试卷共4页．满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名．
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回．

一、单项选择题：本大题共8个小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. $\sin 20^\circ \sin 10^\circ - \cos 20^\circ \cos 10^\circ =$　A

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 在复数范围内，已知 p,q 为实数，$1-i$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根，则 $p+q=$　D

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

3. 已知集合 $A=\{0\}$，$B=\{x|x\leqslant a\}$，若 $A\cap B=A$，则实数 a 的取值范围是　BC

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,0]$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

4. 2021年是中国共产党百年华诞．某学校社团将举办庆祝中国共产党成立100周年革命歌曲展演．现从《歌唱祖国》《英雄赞歌》《唱支山歌给党听》《毛主席派人来》4首独唱歌曲和《没有共产党就没有新中国》《我和我的祖国》2首合唱歌曲中共选出4首歌曲安排演出，要求最后一首歌曲必须是合唱，则不同的安排方法共有　C　$C_4^3+C_2^1$

A. 14　　B. 48　　C. 72　　D. 120

5. 尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学家通过研究已经对地震有所了解，地震时释放出的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$．2011年3月11日，日本东北部海域发生里氏9.0级地震，它所释放出来的能量大约是2008年5月12日我国汶川发生里氏8.0级地震所释放能量的多少倍？（参考数值：$\sqrt{10}\approx 3.162$，$\sqrt[3]{10}\approx 2.154$）　A

A. 31.6　　B. 15.8　　C. 4.6　　D. 1.5

6. 关于函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & 0\leqslant x<2,\\ b-x, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 其中 $a,b\in\mathbf{R}$，给出下列四个结论：　A

甲：6是该函数的零点；　　乙：4是该函数的零点；

丙：该函数的零点之积为0；　　丁：方程 $f(x)=\frac{5}{2}$ 有两个根．

若上述四个结论中有且只有一个结论错误，则该错误结论是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

7. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，若函数 $g(x)=f(x)-a(a\in\mathbf{R})$ 在 $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上恰有三个零点 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，则 x_3-x_1 的值是

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

8. 在菱形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$\angle A=60°$，连结 BD，沿 BD 把 $\triangle ABD$ 折起，使得二面角 $A-BD-C$ 的大小为 $60°$，连结 AC，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 B.

A. 13π　　B. 24π　　C. 36π　　D. 52π

二、多项选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x)$，且在 $[0,2]$ 上是增函数，下面判断正确的是 AC

A. $f(x)$ 的周期是 ~~4~~ 8

B. $f(2)$ 是函数的最大值

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 对称

D. $f(x)$ 在 $[2,6]$ 上是减函数

10. 已知 $a>0,b>0,a+2b=1$，下列结论正确的是

A. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 9

B. a^2+b^2 的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\log_2 a+\log_2 b$ 的最小值为 -3

D. 2^a+4^b 的最小值为 $2\sqrt{2}$

11. 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$，其左右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右支交于点 P、Q，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，则下列结论正确的是

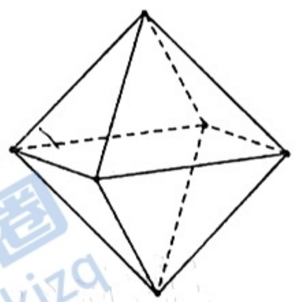
A. $\triangle PF_1Q$ 的周长为 4

B. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 3

C. $|PF_1|=\sqrt{7}+1$

D. $\triangle PF_1Q$ 的内切圆半径为 $\sqrt{7}-1$

12. 连接正方体每个面的中心构成一个正八面体，甲随机选择此正八面体的三个顶点构成三角形，乙随机选择此正八面体三个面的中心构成三角形，且甲、乙的选择互不影响，则



A. 甲选择的三个点构成正三角形的概率为 $\frac{2}{5}$

B. 甲选择的三个点构成等腰直角三角形的概率为 $\frac{3}{5}$

C. 乙选择的三个点构成正三角形的概率为 $\frac{3}{7}$

D. 甲选择的三个点构成的三角形与乙选择的三个点构成的三角形相似的概率为 $\frac{11}{35}$

三、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 $(x+1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=$ ________.

数学史上著名的"冰雹猜想"指的是：任取一个正整数 m，若 m 是奇数，就将该数……再加上1；若 m 是偶数，就将该数除以2. 反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈 $1\to4\to2\to1$. 按照上述猜想可得到一个以 m 为首项的无穷数列记作 $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ 满足的递推关系为 $a_1=m$，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & a_n\text{为偶数}\\ 3a_n+1, & a_n\text{为奇数}\end{cases}$ 如取 $m=6$，根据上述运算法则得出 $a_9=1$，$a_{10}=4$，…，若 $a_7=1$，则满足条件的一个 m 的值为 64.

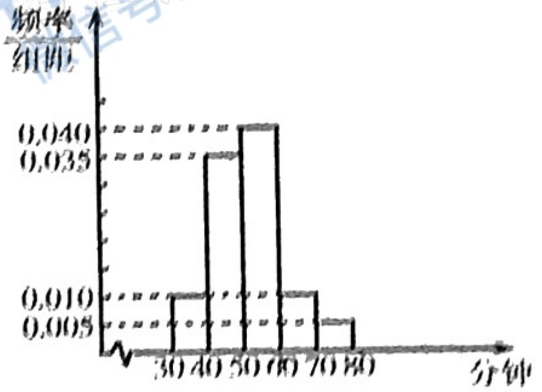
. 已知一张纸上画有半径为2的圆 O，在圆 O 内有一个定点 A，且 $OA=1$，折叠纸片，使圆上某一点 A' 刚好与 A 点重合，这样的每一种折法，都留下一条直线折痕，当 A' 取遍圆上所有点时，所有折痕与 OA' 的交点形成的曲线记为 C，则曲线 C 上的点到圆 O 上的点的最大距离为 1.

16. 已知向量 a,b,c 满足：$|a+b|=3$，$|c|=1$ 且 $a\cdot b+1=(a+b)\cdot c$，则 $|a-b|$ 的取值范围是________.

四、解答题：本大题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

某校为了解学生每天的校内体育锻炼情况，随机选取了100名学生进行调查，其中男生有60人. 下面是根据调查结果绘制的学生日均校内体育锻炼时间（单位：分钟）的频率分布直方图. 将日均校内体育锻炼时间在 $[60,80]$ 内的学生评价为"锻炼时间达标". 已知样本中"锻炼时间达标"的学生中有5名女生.



（1）若该校共有2000名学生，请估计该校"锻炼时间达标"的学生人数；

（2）根据样本数据完成下面的 2×2 列联表，并据此判断是否有90%的把握认为"锻炼时间达标"与性别有关？

是否达标 / 性别	锻炼时间达标	锻炼时间未达标	合计
男	200 a	1000 b	1200
女	100 d	700 c.	800
合计	300	1700	2000.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

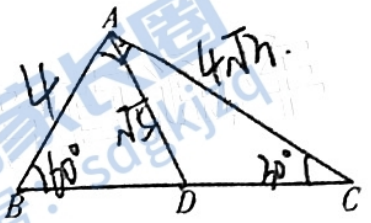
$P(K^2\geq k)$	0.10	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

18. (12 分)

如图，D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上一点，$\angle B=60°$，$AB=4$，$AC=4\sqrt{3}$. 给出如下三种数值方案：

①$AD=\sqrt{5}$；②$AD=\sqrt{15}$；③$AD=2\sqrt{7}$.

判断上述三种方案所对应的 $\triangle ABD$ 的个数，并求 $\triangle ABD$ 唯一时，BD 的长.

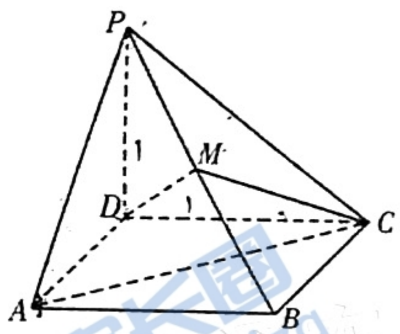


19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=CD=1$，PA 与平面 $ABCD$ 所成角为 $30°$，M 为 PB 上一点且 $CM\perp PA$.

(1) 证明：$PA\perp DM$；

(2) 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l，在 l 上取点 N 使 $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{DA}$，$Q$ 为线段 PN 上一动点，求平面 ACQ 与平面 PDC 所成二面角的余弦值的最大值.



20. (12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{e^x}$ 的单调递增区间是 $[0,1]$，极大值是 $\dfrac{3}{e}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

(2) 若存在非零实数 x_0，使得 $f(x_0)=1$，$m>0$，求 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,m]$ 上的最小值.

21. (12 分)　$r=\frac{3}{2}$

已知一个半径为 $\dfrac{3}{2}$ 的圆的圆心在抛物线 $C:y^2=2px\,(p>0)$ 上，该圆经过坐标原点且与 C 的准线 l 相切. 过抛物线 C 的焦点 F 的直线 AB 交 C 于 A,B 两点，过弦 AB 的中点 M 作平行于 x 轴的直线与直线 OA,OB,l 分别相交于 P,Q,N 三点.　(0,0).

(1) 求 C 的方程；

(2) 当 $|PQ|=\dfrac{1}{3}|MN|$ 时，求直线 AB 的方程.

a　C
d　b

22. (12 分)

设 $a_n=x^n$，$b_n=\dfrac{1}{n^2}$，S_n 为数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和，令 $f_n(x)=S_n-1$，其中 $x\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^+$.

(1) 当 $x=2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 中是否存在三项，使其成等差数列？并说明理由；

(2) 证明：对 $\forall n\in\mathbf{N}^+$，关于 x 的方程 $f_n(x)=0$ 在 $x\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$ 上有且仅有一个根 x_n；

(3) 证明：对 $\forall p\in\mathbf{N}^+$，由(2)中 x_n 构成的数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_n-x_{n+p}<\dfrac{1}{n}$.

高三数学参考答案及评分标准

2021.4

一、单项选择题(每小题5分,共40分)

1－4 ACDD 5－8 ABCD

二、多项选择题(每小题5分,选对但不全的得2分,共20分)

9. BD 10. AD 11. BCD 12. ABD

三、填空题(每小题5分,共20分)

13. 15 14. 1,8,10,64 任选其一 15. $\frac{7}{2}$ 16. $[1,5]$

四、解答题(本大题共6小题,共70分)

17. 解析:(1)由已知得,"锻炼时间达标"的频率为:$(0.01+0.005)\times10=0.15$,

所以"锻炼时间达标"学生共有 $2000\times0.15=300$ 人. ………………………… 3分

(2)由所给数据,可得 2×2 列联表为:

性别 \ 是否达标	锻炼时间达标	锻炼时间未达标	合计
男	10	50	60
女	5	35	40
合计	15	85	100

………… 6分

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算,得:

$K^2=\frac{100\times(10\times35-5\times50)^2}{15\times85\times60\times40}=\frac{50}{153}\approx0.327<2.706$ ………………………… 9分

所以没有90%的把握认为"锻炼时间达标"与性别有关. ………………………… 10分

18. 解:过点 A 作 $AE\perp BC$,垂足为 E,则 $AE=4\cdot\sin60°=2\sqrt{3}$,

当 $AD=\sqrt{5}$ 时,$AD<AE$,所以方案①对应 $\triangle ABD$ 无解,………………………… 2分

当 $AD=\sqrt{15}$ 时,$AE<AD<AB<AC$,所以方案②对应 $\triangle ABD$ 有两解, ………… 4分

当 $AD=2\sqrt{7}$ 时,$AB<AD<AC$,所以方案③对应 $\triangle ABD$ 只有一解. ………… 6分

由方案③知 $AD=2\sqrt{7}$,设 $BD=x$,

所以在 $\triangle ABD$ 中由余弦定理得:$(2\sqrt{7})^2=4^2+x^2-2\times4\times x\times\cos60°$, ………… 9分

即 $x^2-4x-12=0$,

解得 $x=6$ 或 $x=-2$(舍)

又因为在 $\triangle ABC$ 中易得 $BC=8$,$BD=6<BC$,符合题意.

所以 BD 的长为6. ………………………………………… 12分

19. 解:(1)因为四边形 $ABCD$ 为矩形,所以 $AD\perp CD$,

又因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PD\perp CD$,

所以 $CD\perp$ 平面 PAD, ………………………………………… 2分

又 $PA\subset$ 平面 PAD,

所以 $PA\perp CD$,又因为 $CM\perp PA$,

所以 $PA\perp$ 平面 CMD,又 $DM\subset$ 平面 CMD,

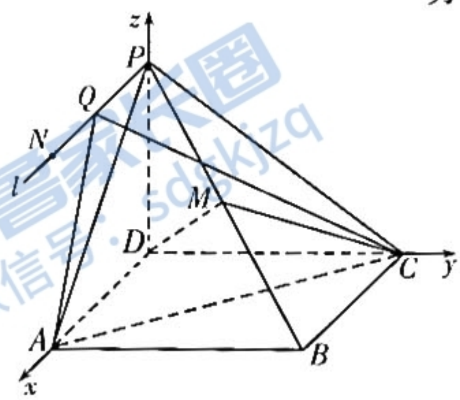
所以 $PA\perp DM$. ………………………………………… 4分

(2)因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $\angle PAD$ 为 PA 与平面 $ABCD$ 所成角,即 $\angle PAD=30°$,

又因为 $PD=1$,所以 $AD=\sqrt{3}$, …………………………………………………… 6 分

分别以直线 DA,DC,DP 为 x 轴,y 轴,z 轴建立如图所示空间直角坐标系,



因为 $AD=\sqrt{3},PD=CD=1$,

因为 $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{DA}$,所以 $PN=\sqrt{3}$,

令 $PQ=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3})$,则 $D(0,0,0),A(\sqrt{3},0,0)$,

$C(0,1,0),Q(\lambda,0,1)$, ………………………………… 7 分

所以 $\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{CQ}=(\lambda,-1,1)$,

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 为平面 ACQ 的一个法向量,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CQ}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ \lambda x-y+z=0\end{cases}$,取 $x=1$,

则 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},\sqrt{3}-\lambda)$. ………………………………………………… 9 分

因为 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$ 是平面 PDC 的一个法向量. ……………………………… 10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+3+(\sqrt{3}-\lambda)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(\lambda-\sqrt{3})^2+4}}$,

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3}$,所以当 $\lambda=\sqrt{3}$ 时,$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>$ 有最大值 $\dfrac{1}{2}$.

所以所求二面角的余弦值的最大值为 $\dfrac{1}{2}$. ……………………………………… 12 分

20. 解:(1)因为 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{e^x}$,

所以 $f'(x)=\dfrac{(2ax+b)e^x-(ax^2+bx+c)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-ax^2+(2a-b)x+b-c}{e^x}$ ………… 1 分

因为 $e^x>0$,

所以 $f'(x)\geqslant0$ 的解集与 $-ax^2+(2a-b)x+b-c\geqslant0$ 解集相同,

同为 $x\in[0,1]$.

所以有 $\begin{cases}a>0\\ \dfrac{2a-b}{a}=1\\ \dfrac{b-c}{-a}=0\end{cases}$ 解得 $a=b=c$, …………………………………………… 3 分

所以 $f(x)=\dfrac{a(x^2+x+1)}{e^x},f'(x)=\dfrac{-ax^2+ax}{e^x}(a>0)$

因为 $a>0$,所以当 $x<0$ 或 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减,

当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$f'(x)\geqslant0$,函数 $f(x)$ 单调递增,

且 $f'(1)=0$,所以在 $x=1$ 处 $f(x)$ 取得极大值为 $\dfrac{3}{e}$,

即 $f(1)=\dfrac{3a}{e}=\dfrac{3}{e}$,所以 $a=1$,即 $a=b=c=1$, ……………………………… 6 分

所以 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{e^x},f'(x)=\dfrac{-x^2+x}{e^x}$.

所以 $f(-1)=\dfrac{1}{e^{-1}}=e,f'(-1)=\dfrac{-2}{e^{-1}}=-2e$.

所以函数在点$(-1,f(-1))$处切线方程为:$y-e=-2e(x+1)$即$y=-2ex-e$. ……………………………………………………………………………… 8分

(2)由(1)知函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,1)$上单调递增,且$f(0)=\frac{1}{e^0}=1$,

所以满足$f(x_0)=1(x_0\neq0)$的x_0存在于区间$(1,+\infty)$.

所以当$0<m<x_0$时,由函数的单调性易知,$f(x)$的最小值为$f(0)=1$. ………… 10分

当$m\geqslant x_0$时,$f(m)\leqslant f(x_0)=f(0)=1$,

所以此时$f(x)$的最小值为$f(m)=\frac{m^2+m+1}{e^m}$,

综上所述:$f(x)$在区间$(-\infty,m]$上的最小值为$\begin{cases}1, & 0<m\leqslant x_0\\ \frac{m^2+m+1}{e^m}, & m>x_0\end{cases}$. …………… 12分

21. 解:设圆的圆心为(a,b)

由圆与抛物线准线l相切,得$\frac{p}{2}+a=\frac{3}{2}$,

又因为圆过抛物线的焦点F,故$a=\frac{p}{4}$, ………………………………………… 2分

所以$\frac{p}{2}+\frac{p}{4}=\frac{3}{2}$,解得$p=2$,

即C的方程为$y^2=4x$. ………………………………………………………………… 4分

(2)由题意知$F(1,0)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$M(x_0,y_0)$,

由题意知,直线AB的斜率一定存在且不为0,

设直线AB:$y=k(x-1)$,与抛物线C:$y^2=4x$联立得:

$ky^2-4y-4k=0$

从而$\Delta=16+16k^2>0$,$y_1+y_2=\frac{4}{k}$,$y_1\cdot y_2=-4$, ………………………………… 6分

因为M为线段AB的中点,

所以$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2}{k}$,$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{8}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{8}=\frac{2}{k^2}+1$,

即$M(\frac{2}{k^2}+1,\frac{2}{k})$, ……………………………………………………………… 7分

直线AO的方程为$y=\frac{4}{y_1}x$,可求P点的横坐标$x_P=\frac{y_1}{2k}$;

同理Q点的横坐标$x_Q=\frac{y_2}{2k}$,

因为$|PQ|=\frac{1}{3}|MN|$,

即$|x_P-x_Q|=\frac{1}{3}(x_0-x_N)$,

即$\left|\frac{y_1}{2k}-\frac{y_2}{2k}\right|=\frac{1}{3}(x_0-x_N)$,

即$\frac{\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}}{2k}=\frac{\sqrt{\frac{16}{k^2}+16}}{2k}=\frac{2}{3}(\frac{1}{k^2}+1)$, …………………………… 10分

解得:$k=\pm2\sqrt{2}$,

故直线AB的方程为:$2\sqrt{2}x-y-2\sqrt{2}=0$或$2\sqrt{2}x+y-2\sqrt{2}=0$. ……………… 12分

22. 解:(1)$x=2$时,$a_n=2^n$,

若存在三项$2^r,2^s,2^t$成等差数列($r<s<t,r,s,t\in\mathbf{N}^+$),

则有:$2\cdot 2^{s}=2^{r}+2^{t}$, ······························ 2分

两边除以2^{r}得:$2\cdot 2^{s-r}=1+2^{t-r}$,

由 $s-r\in\mathbf{N}^{+}$, $t-r\in\mathbf{N}^{+}$,

故上式左边为偶数,右边为奇数,矛盾.

所以,不存在三项使其成等差数列. ······························ 4分

(2)$f_n(x)=-1+x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}$,

$f_n'(x)=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n}$,

当$x\in(0,+\infty)$时,$f'_n(x)>0$,$f_n(x)$单调递增, ······························ 5分

由于$f_1(1)=0$,当$x\geqslant 2$时,$f_n(1)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>0$,

$$f_n\left(\frac{2}{3}\right)=-1+\frac{2}{3}+\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2^2}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3^2}+\cdots+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^2}\right]$$

$$\leqslant-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{\frac{4}{9}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<0.$$

故存在唯一$x_n\in\left[\frac{2}{3},1\right]$,使$f_n(x_n)=0$. ······························ 8分

(3)对$\forall p\in\mathbf{N}^{+}$,由(2)中,$x_n$构成数列$\{x_n\}$,

当$x>0$时,$f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}>f_n(x)$,

故$f_{n+1}(x_n)>f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1})=0$,

由于$f_{n+1}(x)$在$(0,+\infty)$单调递增,

故$x_{n+1}<x_n$即$\{x_n\}$为单调递减数列,

因此对任意$p\in\mathbf{N}_{+}$,$x_n-x_{n+p}>0$, ······························ 10分

又$f_n(x_n)=-1+x_n+\frac{x_n^2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n^n}{n^2}=0$

$$f_{n+p}(x_{n+p})=-1+x_{n+p}+\frac{x_{n+p}^2}{2^2}+\cdots+\frac{x_{n+p}^n}{n^2}+\cdots+\frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2}=0$$

两式相减

$$x_n-x_{n+p}=\frac{x_{n+p}^2-x_n^2}{2^2}+\frac{x_{n+p}^3-x_n^3}{3^2}+\cdots+\frac{x_{n+p}^n-x_n^n}{n^2}+\frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2}$$

$$<\frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{x_{n+p}^{n+2}}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2}<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},$$

故$\{x_n\}$满足$0<x_n-x_{n+p}<\frac{1}{n}$. ······························ 12分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索