东城区 2016—2017 学年度第一学期期末教学统一检测

高三数学(理科)

2017.1

本试卷共 6 页，共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中选出符合题目要求的一项)

1. 已知集合 $A=\{x|(x-1)(x-3)<0\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|1<x<3\}$　　B. $\{x|1<x<4\}$

C. $\{x|2<x<3\}$　　D. $\{x|2<x<4\}$

2. 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程是

A. $y=-1$　　B. $y=-\frac{1}{2}$　　C. $x=-1$　　D. $x=-\frac{1}{2}$

3. “$k=1$”是“直线 $kx-y-3\sqrt{2}=0$ 与圆 $x^2+y^2=9$ 相切”的

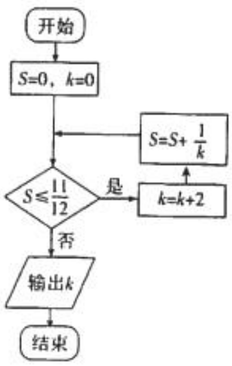
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 执行如图所示的程序框图，输出的 k 值为

A. 6　　B. 8

C. 10　　D. 12



5. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x>y>0$，则

A. $\tan x-\tan y>0$　　B. $x\sin x-y\sin y>0$

C. $\ln x+\ln y>0$　　D. $2^x-2^y>0$

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(x+1)\geq 0$ 的解集为

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

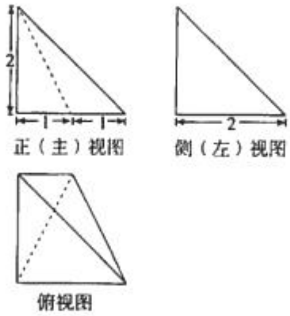
7. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为

A. $\frac{2}{3}$

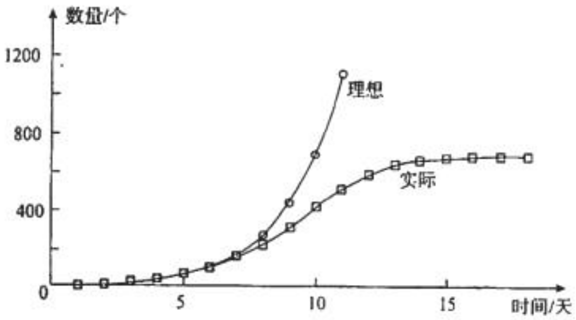
B. $\frac{4}{3}$

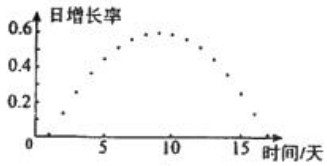
C. 2

D. $\frac{8}{3}$

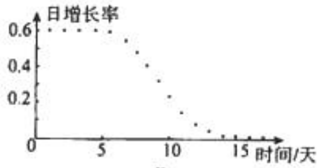


8. 数列$\{a_n\}$表示第n天午时某种细菌的数量．细菌在理想条件下第n天的日增长率$r_n=0.6$ $(r_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}, n\in N^*)$．当这种细菌在实际条件下生长时，其日增长率$r_n$会发生变化．下图描述了细菌在理想和实际两种状态下细菌数量Q随时间的变化规律．那么，对这种细菌在实际条件下日增长率r_n的规律描述正确的是

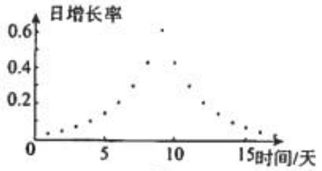




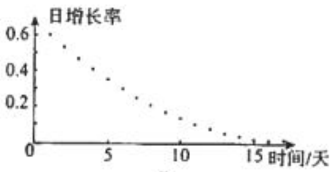
A



B



C



D

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. 若复数 $(2-\mathrm{i})(a+2\mathrm{i})$ 是纯虚数，则实数 $a=$_______.

10. 若 x,y 满足 $\begin{cases} x-2\leqslant 0, \\ x+y\geqslant 0, \\ x-3y+4\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为_______.

11. 若点 $P(2,0)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一条渐近线的距离为 1，则 $a=$_______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=2$，$AC=3$，$\angle A=60^\circ$，则 $BC=$_____；若 $AD\perp BC$，则 $AD=$_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 所在平面内一点 P，满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，延长 BP 交 AC 于点 D，若 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda=$_____.

14. 关于 x 的方程 $g(x)=t(t\in\mathbf{R})$ 的实根个数记为 $f(t)$. 若 $g(x)=\ln x$，则 $f(t)=$_______；若 $g(x)=\begin{cases} x, x\leqslant 0, \\ -x^2+2ax+a, x>0 \end{cases}$ $(a\in\mathbf{R})$，存在 t 使得 $f(t+2)>f(t)$ 成立，则 a 的取值范围是_______.

三、解答题(共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程)

15.（本小题 13 分）

已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，满足 $a_1=3$，$a_4=24$，数列 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为 4，公差为 1 的等差数列.

(Ⅰ)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

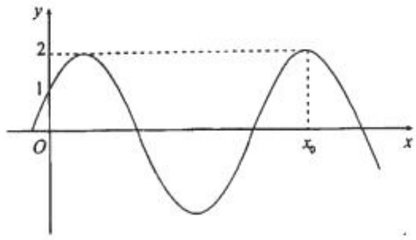
(Ⅱ)求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

16.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$部分图象如图所示．

（Ⅰ）求 $f(x)$的最小正周期及图中 x_0 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值．



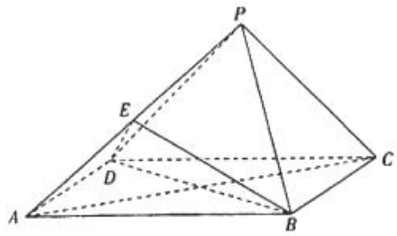
17.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 为矩形，平面 PCD⊥平面 ABCD，$BC=1$，$AB=2$，$PC=PD=\sqrt{2}$，E 为 PA 中点．

（Ⅰ）求证：PC//平面 BED；

（Ⅱ）求二面角 A-PC-D 的余弦值；

（Ⅲ）在棱 PC 上是否存在点 M，使得 BM⊥AC？若存在，求$\frac{PM}{PC}$的值；若不存在，说明理由．



18.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+1}(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的最大值.

19.（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $M(2,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$. A,B 是椭圆 C 上两点，且直线 OA,OB 的斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$，O 为坐标原点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若射线 OA 上的点 P 满足 $|PO|=3|OA|$，且 PB 与椭圆交于点 Q，求 $\dfrac{|BP|}{|BQ|}$ 的值.

20.（本小题13分）

已知集合 $A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)\}$. $x,y\in A_n$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中 $x_i,y_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$. 定义 $x\odot y=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 若 $x\odot y=0$，则称 x 与 y 正交.

（Ⅰ）若 $x=(1,1,1,1)$，写出 A_4 中与 x 正交的所有元素；

（Ⅱ）令 $B=\{x\odot y\mid x,y\in A_n\}$. 若 $m\in B$，证明：$m+n$ 为偶数；

（Ⅲ）若 $A\subseteq A_n$，且 A 中任意两个元素均正交，分别求出 $n=8,14$ 时，A 中最多可以有多少个元素.