数学 · 白卷

参考答案及评分标准

一、选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1. C　2. D　3. A　4. B　5. A　6. B　7. C　8. D

二、选择题(每小题 5 分,共 20 分)

9. ACD　10. BC　11. ABC　12. AC

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. $-\frac{5}{2}$　14. 2 和 5(2 - 7 中任意不相连的两数即可)　15. $\frac{\pi}{3}$　16. $\frac{24}{7}\pi$

四、解答题(共 70 分)

17. 解:

选择条件①:$S_2=6,a_{n+1}=S_n+2$,

由题意得$\begin{cases}a_1+a_2=6\\a_2=a_1+2\end{cases}$,则$\begin{cases}a_1=2\\a_2=4\end{cases}$. ………………(3 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_{n+1}-a_n=(S_n+2)-(S_{n-1}+2)=a_n$,解得 $a_{n+1}=2a_n$. ………………(6 分)

又 $a_2=2a_1$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列, ………………(8 分)

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. ………………(10 分)

选择条件②:$S_n=2a_n-a_1$ 且 a_1,a_2+1,a_3 成等差数列.

由题意得当 $n\geqslant 2$ 时,

$S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$,解得 $a_n=2a_{n-1}$, ………………(3 分)

又 a_1,a_2+1,a_3 成等差数列,

所以 $2(2a_1+1)=4a_1+a_1$,解得 $a_1=2$, ………………(6 分)

所以数列$\{a_n\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列, ………………(8 分)

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. ………………(10 分)

选择条件③:$\log_2(S_n+2)=n+1$.

由题意得 $S_n+2=2^{n+1}$,$S_n=2^{n+1}-2$, ………………(3 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2^n=2^n$, ………………(6 分)

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$, ………………(8 分)

综上,数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. ………………(10 分)

18. 解:

(1)因为 $c\cos B+b\cos C=2a\cos A$,

由正弦定理可得 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=2\sin A\cos A$,

可得 $\sin(C+B)=\sin A=2\sin A\cos A$, ………………(3 分)

因为 $A\in(0,\pi)$,$\sin A>0$,所以 $\cos A=\frac{1}{2}$, ………………(5 分)

故 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………(6 分)

(2)由余弦定理得 $a^2=16=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$, ………………(7 分)

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$,所以 $bc=16$, ………………(9 分)

$(b+c)^2=16+3bc=64$,所以 $b+c=8$, ………………(11 分)

故$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=4+8=12$. ………………(12 分)

19. 解:

(1)取 BC 的中点 O,连接 AO,DO.

因为$\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $AO\perp BC$. ………………(2 分)

同理,在$\triangle BCD$ 中,$DO\perp BC$. ………………(3 分)

又 $AO\cap DO=O$,所以 $BC\perp$平面 AOD. ………………(4 分)

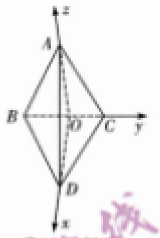
因为 $AD\subset$平面 AOD,所以 $AD\perp BC$. ………………(5 分)

(2)由(1)可知,OA,OD,OC 两两垂直,以点 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}$的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,

设$\triangle ABC$ 的边长为 1,则 $A(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}),D(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0),B(0,-\frac{1}{2},0),C(0,\frac{1}{2},0)$,

$\overrightarrow{AC}=(0,\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{AB}=(0,-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{AD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$. ……………………(7 分)

设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,



第 19 题解图

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$,

令 $z=1$,则 $x=1,y=-\sqrt{3}$,即 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$. ……………………(9 分)

设 AC 与平面 ABD 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle|=|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}|=|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1\times\sqrt{5}}|=\frac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………(11 分)

所以 AC 与平面 ABD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………(12 分)

20. 解:

(1)根据频数分布表得:

$\frac{1}{50}(17\times4+19\times6+21\times7+23\times9+25\times11+27\times6+29\times4+31\times3)=23.64$,

所以这 50 个社区这一天产生的垃圾量的平均值为 23.64 吨. ……………………(3 分)

(2)由频数分布表知,有 7 个"超标"社区,其中 4 个社区一天产生的垃圾量为 29 吨,回收资源量为 $29\times28\%=8.12$ 吨;3 个社区一天产生的垃圾量为 31 吨,回收资源量为 $31\times25\%=7.75$ 吨. ……………………(6 分)

所以 Y 的可能取值为 32.48,32.11,31.74,31.37, ……………………(7 分)

且 $P(Y=32.48)=\frac{C_4^4}{C_7^4}=\frac{1}{35}$;$P(Y=32.11)=\frac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$;

$P(Y=31.74)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$;$P(Y=31.37)=\frac{C_4^1C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$. ……………………(10 分)

所以 Y 的分布列为

Y	32.48	32.11	31.74	31.37
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

所以 $EY=32.48\times\frac{1}{35}+32.11\times\frac{12}{35}+31.74\times\frac{18}{35}+31.37\times\frac{4}{35}\approx31.85$. ……………………(12 分)

21. 解:

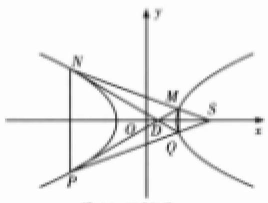
(1)由题知$\begin{cases}c-a=\sqrt{7}-2\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$, ……………………(2 分)

解得 $a^2=4,b^2=3$, ……………………(4 分)

所以双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. ……………………(5 分)

(2)由 $MQ\perp x$ 轴,$MQ/\!/NP$,可知四边形 $MNPQ$ 为等腰梯形,且关于 x 轴对称,

故四边形 $MNPQ$ 的对角线交点 D 在 x 轴上,如图所示. ……………………(6 分)



第 21 题解图

设点 $D(t,0)$,则对角线 MP 的方程为 $x=my+t(m\neq0)$.

设 $M(x_1,y_1),P(x_2,y_2)$,由对称性知 $Q(x_1,-y_1),N(x_2,-y_2)$,

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1\\ x=my+t\end{cases}$,消去 x 得$(3m^2-4)y^2+6mty+3t^2-12=0$,

所以 $\Delta=(6mt)^2-4(3m^2-4)(3t^2-12)=48(3m^2-4+t^2)>0$,

即 $3m^2+t^2>4$.

由韦达定理得 $y_1+y_2=\frac{-6mt}{3m^2-4}$，$y_1y_2=\frac{3t^2-12}{3m^2-4}$，…………（8 分）

由 M,N,S 三点共线知 $k_{MS}=k_{NS}$，即 $\frac{y_1}{x_1-4}=\frac{-y_2}{x_2-4}$，

所以 $y_1(my_2+t-4)+y_2(my_1+t-4)=0$，

整理得 $2my_1y_2+(t-4)(y_1+y_2)=0$，

所以 $\frac{2m(3t^2-12)+(t-4)(-6mt)}{3m^2-4}=0$，所以 $\frac{24m(t-1)}{3m^2-4}=0$，

即 $24m(t-1)=0$，$t=1$，

所以直线 MP 过定点 $(1,0)$，即 $D(1,0)$. …………（10 分）

因为双曲线 C 的渐近线方程为 $\sqrt{3}x\pm 2y=0$，取方程 $\sqrt{3}x-2y=0$ 时，

由点到直线的距离公式得 $d=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

根据对称性知点 D 到双曲线 C 的渐近线的距离之和为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. …………（12 分）

22. 解：

(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{-x}+x$，

所以 $f'(x)=-e^{-x}+1=\frac{e^x-1}{e^x}$，…………（2 分）

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，

因为函数 $y=e^x-1$ 在 **R** 上单调递增，

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. …………（3 分）

所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(0)=1$. …………（4 分）

(2) 由 $f(x)=e^{-x}+(1-a)x$，

得 $f'(x)=-e^{-x}+(1-a)=\frac{(1-a)e^x-1}{e^x}$.

①当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{-x}>0$，此时函数 $f(x)$ 没有零点，符合题意. …………（6 分）

②当 $a>1$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 单调递减.

又 $f(0)=1>0$，且 $f(\frac{1}{a-1})=e^{\frac{1}{1-a}}-1<0$，

所以函数 $f(x)$ 有零点，不符合题意. …………（8 分）

③当 $a<1$ 时，令 $f'(x)=\frac{(1-a)e^x-1}{e^x}=0$，则 $x=-\ln(1-a)$.

当 $x\in(-\infty,-\ln(1-a))$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(-\ln(1-a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 单调递增. …………（10 分）

所以 $f(x)_{\min}=f(-\ln(1-a))=(1-a)[1-\ln(1-a)]$.

若函数 $f(x)$ 无零点，则需 $f(x)_{\min}>0$，

由 $(1-a)[1-\ln(1-a)]>0$，得 $1-e<a<1$.

综上所述，若函数 $f(x)$ 无零点，则实数 a 的取值范围为 $(1-e,1]$. …………（12 分）

详解详析

1. C 【命题立意】本题考查复数的乘除运算，考查运算求解能力.

【解题思路】因为 $z(2-i)=4+3i$，所以 $z=\frac{4+3i}{2-i}=\frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5+10i}{5}=1+2i$.

2. D 【命题立意】本题考查样本数字特征，考查数据处理能力及统计与概率思想.

【解题思路】逐项分析如下：

选项	正误	原因
A	×	由平均数、中位数的定义，得新数据的平均数为 $2a$，中位数为 $2b$
D	√	
B	×	新数据的方差为 $2^2c=4c$ 【易错】容易忽略方差的变化是各个数据扩大倍数的平方.
C	×	新数据的标准差为 $\sqrt{4c}=2\sqrt{c}$

3. A 【命题立意】本题考查不等式的应用，考查运算求解能力、应用意识.

【解题思路】设供热站建在离社区 x 千米处，则自然消费 $y_1=\frac{k_1}{x}$，供热费 $y_2=k_2x$，

【难点】根据题干信息准确写出自然消费与距离及供热费与距离之间的函数关系式.

当 $x=20$ 时,$y_1=0.5$,$y_2=8$,所以 $k_1=10$,$k_2=\frac{2}{5}$.

【易错】容易忽略5千元和8万元的单位不统一.

两项费用之和 $y=y_1+y_2=\frac{10}{x}+\frac{2}{5}x\geq 2\sqrt{\frac{10}{x}\cdot\frac{2}{5}x}=4$,当且仅当 $\frac{10}{x}=\frac{2}{5}x$,即 $x=5$ 时取等号,故供热站应建在离社区5千米.

4. B 【命题立意】本题考查函数图象判断,考查推理论证能力及数形结合思想.

【解题思路】当 $x>0$ 时,$|x|^x=x^x$,$f(x)=\ln\frac{x^x+x^{-x}}{|x|^x}=\ln(1+x^{-2x})$,可得到函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是减函数,故选B.

5. A 【命题立意】本题考查三角函数的图象与性质,考查运算求解能力及数形结合思想.

【解题思路】由图可得 $\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$,即 $T=\pi$,则 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$,由 $f(\frac{5\pi}{6})=A\sin(\frac{5\pi}{6}\times 2+\varphi)=-A$,得 $\frac{5\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,则 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

6. B 【命题立意】本题考查等比数列和新定义,考查推理论证能力、运算求解能力及化归与转化思想.

【解题思路】若数列 $\{a_n\}$ 为"梦想数列",则 $a_{n+1}=3a_n+2$,可得 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$,所以"梦想数列" $\{a_n\}$ 满足 $\{a_n+1\}$ 是公比为3的等比数列.

若正项数列 $\{\frac{1}{b_n}-1\}$ 为"梦想数列",可得 $\{b_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

【难点】根据"梦想数列" $\{\frac{1}{b_n}-1\}$ 满足的条件得到……等比数列,得到数列 $\{b_n\}$ 的公比.

因为 $b_1=2$,因此 $b_4=2\times\frac{1}{3^3}=\frac{2}{27}$.

7. C 【命题立意】本题考查函数基本性质与求值,考查运算求解能力、推理论证能力及分类与整合思想.

【解题思路】

解法一 由题易知 $f(x)$ 为偶函数,所以只需研究 $x\geq 0$ 时函数的情况即可.

当 $0\leq x<2$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,$f(x)_{\min}=f(0)=-a$;

当 $x\geq 2$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,$f(x)_{\min}=f(2)=0$.

要使对任意的实数 x,不等式 $f(x)+1\geq 0$ 恒成立,

则只需 $-a+1\geq 0$ 即 $a\leq 1$,所以 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

解法二 当 $-2<x<2$ 时,$-a\leq x^2-a<4-a$;

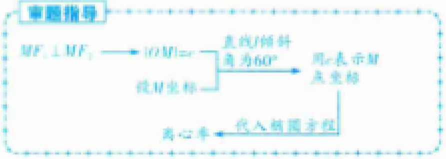
当 $x\leq -2$ 或 $x\geq 2$ 时,$\lg(|x|-1)\geq\lg 1=0$,

因为对任意的实数 x,不等式 $f(x)+1\geq 0$ 恒成立,

所以 $-a+1\geq 0$,即 $a\leq 1$,所以 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

8. D 【命题立意】本题考查椭圆,考查运算求解能力及数形结合思想.

审题指导



【解题思路】由 $MF_1\perp MF_2$,则 $|OM|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c$,

不妨设 $M(x,y)$ 在第一象限,则 $x=c\cos 60°=\frac{1}{2}c$,$y=c\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}c$,故 $M(\frac{1}{2}c,\frac{\sqrt{3}}{2}c)$.

【难点】根据直线 l 的倾斜角为60°,结合三角函数用 c 表示出点 M 的坐标.

将点 M 的坐标代入椭圆的方程得 $\frac{c^2}{4a^2}+\frac{3c^2}{4b^2}=1$,即 $b^2c^2+3a^2c^2=4a^2b^2$,化简可得 $8a^2c^2-c^4-4a^4=0$.

则 $8\frac{c^2}{a^2}-\frac{c^4}{a^4}-4=0$,即 $8e^2-e^4-4=0$,解得 $e^2=4-2\sqrt{3}$ 或 $e^2=4+2\sqrt{3}$(舍去),

则椭圆的离心率 $e=\sqrt{3}-1$.

【易错】容易忽略椭圆离心率的范围是 $(0,1)$.

9. ACD 【命题立意】本题考查集合的交、并、补运算,考查运算求解能力.

【解题思路】$A=\{x|2x+1\geq 0,x\in\mathbf{Z}\}=\{x|x\geq 0,x\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{-1,0,1,2\}$,逐项分析如下:

选项	正误	原因
A	√	$A\cap B=\{0,1,2\}$
B	×	$A\cup B=\{x|x\geq -1,x\in\mathbf{Z}\}$
C	√	$\complement_{\mathbf{Z}}A=\{x|x<0,x\in\mathbf{Z}\}$,$(\complement_{\mathbf{Z}}A)\cap B=\{-1\}$
D	√	$A\cap B$ 中有3个元素,故其子集个数为8,其中真子集个数为7

10. BC 【命题立意】本题考查直线与圆,考查运算求解能力及数形结合思想.

【解题思路】逐项分析如下:

选项	正误	原因
A	×	由 $kx-y+2k=0$ 可得 $y=k(x+2)$,所以直线 l 恒过定点 $(-2,0)$
B	√	若直线 $l:kx-y+2k=0$ 与直线 $l_0:x-2y+2=0$ 垂直,则 $k+2=0$,解得 $k=-2$,所以存在 k 使得直线 l 与 l_0 垂直

C	√	圆 O 的半径为 4，因为直线 l 过定点 $P(-2,0)$，且 $\|OP\|=2<4$，故 $P(-2,0)$ 在圆 O 内，故直线 l 与圆 O 相交
D	×	若 $k=-1$，则直线 l 的方程为 $y=-x-2$，此时原点 O 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$，故直线 l 被圆 O 截得的弦长为 $2\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{14}$

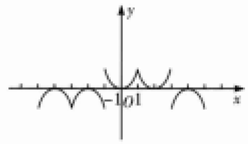
11. ABC 【命题立意】本题考查空间线面位置关系和异面直线夹角，考查推理论证能力、空间想象能力及特殊与一般思想.

【解题思路】逐项分析如下：

选项	正误	原因
A	√	在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $AC\perp BD$，$AC\perp DD_1$，$BD\cap DD_1=D$，所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，又因为 $BD_1\subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $AC\perp BD_1$
B	√	在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\triangle A_1BC_1$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正三角形，当 P 是线段 BC_1 的中点时，A_1P 取最小值 $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C	√	由正方体可知，$D_1C/\!/A_1B$，$AC/\!/A_1C_1$，且 $A_1B\cap A_1C_1=A_1$，$AC\cap D_1C=C$，所以平面 $ACD_1/\!/$ 平面 A_1C_1B，又 $A_1P\subset$ 平面 A_1C_1B，所以 $A_1P/\!/$ 平面 ACD_1
D	×	因为 $BC_1/\!/AD_1$，所以异面直线 A_1P 与 AD_1 所成的角即为 A_1P 与 BC_1 所成的角. 观察正 $\triangle A_1BC_1$，当 P 是线段 BC_1 的中点时，$A_1P\perp BC_1$，所成角最大为 $\frac{\pi}{2}$；当 P 位于线段 BC_1 两个端点时，所成角最小为 $\frac{\pi}{3}$，所以异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角的取值范围是 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$

12. AC 【命题立意】本题考查函数的图象与性质，考查推理论证能力、运算求解能力及数形结合思想、函数与方程思想.

【解题思路】



第 12 题解图

A 项：当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时 $f(x)=x^2$，结合 $f(x-1)$ 是奇函数，$f(x+1)$ 为偶函数作出函数大致图象如图所示，函数 $f(x)$ 不关于 y 轴对称，不是偶函数，A 正确；

B 项：因为 $f(x-1)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，即 $f(-2-x)+f(x)=0$.

【难点】通过对称点得到函数值之间的关系.

又因为 $f(x+1)$ 为偶函数，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，即 $f(2-x)=f(x)$. 因为 $f(-2-x)+f(2-x)=0$，所以 $f(x-2)+f(x+2)=0$，所以 $f(x+8)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 的最小正周期为 8，B 错误；

C 项：结合图象可知函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上有 3 个零点，C 正确；

D 项：$f(5)=f(-3)=-f(1)=-1$，$f(4)=f(-2)=-f(0)=0$，故 $f(4)>f(5)$，D 错误.

13. $-\frac{5}{2}$ 【命题立意】本题考查二项式定理，考查运算求解能力.

【解题思路】$(\frac{x^2}{2}-1)^5$ 的二项展开式的通项公式为

$T_{r+1}=C_5^r(\frac{x^2}{2})^{5-r}(-1)^r=(-1)^r(\frac{1}{2})^{5-r}C_5^r x^{10-2r}$，

【易错】容易忽略负号.

令 $10-2r=4$，解得 $r=3$，

故 x^4 的系数为 $(-1)^3(\frac{1}{2})^2C_5^3=-\frac{5}{2}$.

14. 2 和 5（2－7 中任意不相连的两数即可） 【命题立意】本题考查排列组合，考查推理论证能力及特殊与一般思想.

【解题思路】因为关掉的 2 盏灯不是两端的灯，所以 1 和 8 不能选；关掉的 2 盏灯不能相邻，则 2－7 中任意不相连的两数即可，如 2 和 5.

15. $\frac{\pi}{3}$ 【命题立意】本题考查平面向量的数量积，考查运算求解能力.

【解题思路】因为 $\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle=\frac{\pi}{6}$，所以 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1\times1\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $\boldsymbol{m}=\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$，

所以 $\boldsymbol{n}^2=(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2)^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=$

$\frac{7}{4}$，所以 $|n|=\frac{\sqrt{7}}{2}$；

$m^2=(\frac{\sqrt{3}}{2}e_1-\frac{2}{3}e_2)^2=\frac{3}{4}+\frac{4}{9}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}e_1\cdot e_2=\frac{7}{36}$，

所以 $|m|=\frac{\sqrt{7}}{6}$，

$m\cdot n=(\frac{\sqrt{3}}{2}e_1-\frac{2}{3}e_2)\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}e_1\cdot e_2-\frac{\sqrt{3}}{3}e_1\cdot e_2=\frac{7}{24}$，

所以 $\cos\langle m,n\rangle=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=\frac{\frac{7}{24}}{\frac{\sqrt{7}}{6}\times\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{1}{2}$，

$\langle m,n\rangle=\frac{\pi}{3}$.

【易错】容易忽略平面向量夹角范围为 $[0,\pi]$.

16. $\frac{24}{7}\pi$ 【命题立意】本题考查正四棱锥与球，考查空间想象能力、运算求解能力及数形结合思想、函数与方程思想.

审题指导

正四棱锥体积为6，高为3 → 底面正方形边长 $\xrightarrow{\text{作出球心}O}$ 球半径 R，O 到侧面距离 → 截面圆半径 → 截面圆面积

【解题思路】因为正四棱锥的体积为6，高为3，设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，所以 $6=\frac{1}{3}\times3a^2$，解得 $a=\sqrt{6}$. 取正四棱锥的底面中心为 E，CD 的中点 F，连接 PE,EF,PF，如图所示，

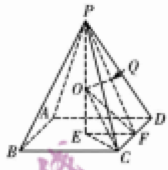
则 $PE=3$，正四棱锥的外接球球心 O 在 PE 上，设其半径

【难点】利用正四棱锥的高与底面正方形边长的大小确定球心所在位置.

为 R，则 $OP=R$，在 Rt△OEC 中，由勾股定理得球 O 的半径 $R^2=EC^2+(PE-R)^2$，

所以 $R^2=3+(3-R)^2$，解得 $R=2$，

在 Rt△PEF 中，由勾股定理得 $PF=\sqrt{PE^2+(\frac{a}{2})^2}=\sqrt{9+\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{42}}{2}$，过点 O 作 $OQ\perp PF$，设 O 到平面 PCD 的距离为 b，即 $OQ=b$，所以 $\frac{b}{R}=\frac{EF}{PF}$，即 $b=\frac{2}{\sqrt{7}}$，



第 16 题解图

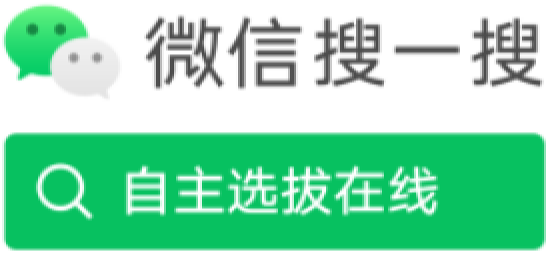
所以平面 PCD 截球 O 所得截面圆的半径 $r^2=R^2-b^2=4-\frac{4}{7}=\frac{24}{7}$. 所以正四棱锥的一个

【难点】[illegible]距离和正四棱锥外接球半径构造直角三角形求截面圆半径.

侧面截其外接球所得截面的面积为 $\pi r^2=\frac{24}{7}\pi$.

微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》