绝密★启用前

2023年普通高等学校全国统一模拟招生考试
新未来5月联考
文科数学

全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生号________ 班级________ 姓名________

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 回答选考题时，考生须按照题目要求作答，并用2B铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,2,3,5\}$，$B=\{x\mid y=\lg[(3-x)(x+1)]\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{5\}$　　B. $\{0,2\}$　　C. $\{-1,3,5\}$　　D. $\{-1,0,2,3\}$

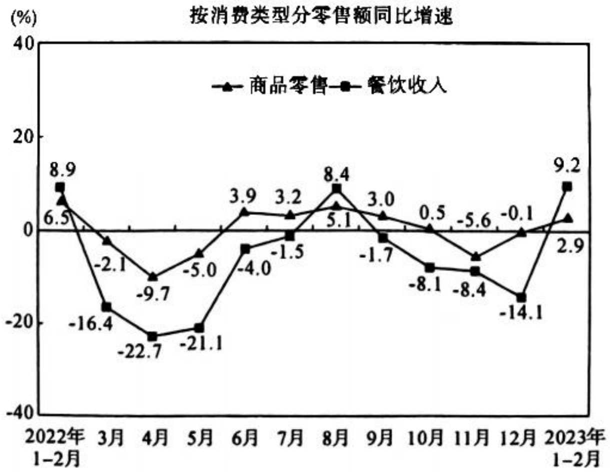
2. 已知复数 z 满足 $z=\dfrac{(1+i)^2}{2}$，则 $z^{2023}=$

A. -1　　B. 1　　C. $-i$　　D. i

3. 在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为 a,b,c，$\angle A=60^\circ$，且△ABC的面积为 $\sqrt{3}$，若 $b+c=6$，则 $a=$

A. $2\sqrt{6}$　　B. 5　　C. $\sqrt{30}$　　D. $2\sqrt{7}$

4. 如图为近一年我国商品零售总额和餐饮收入总额同比增速情况折线图，根据该图，下列结论正确的是



A. 2023年1—2月份，商品零售总额同比增长9.2%

B. 2022年3—12月份，餐饮收入总额同比增速都降低

C. 2022年6—10月份，商品零售总额同比增速都增加

D. 2022年12月，餐饮收入总额环比增速为−14.1%

5. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=8$，$\left|\frac{5}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right|=7$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. -24　　B. -12　　C. 12　　D. 24

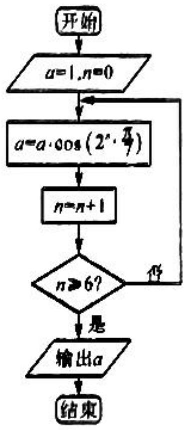
6. 一个球体被平面截下的一部分叫做球缺，截面叫做球缺的底面，垂直于截面的直径被截后，剩下的线段长叫做球缺的高，球缺曲面部分的面积$S=2\pi RH$，其中R为球的半径，H为球缺的高. 如图，若一个半径为R的球体被平面所截获得两个球缺，其高之比为$\frac{H_1}{H_2}=2$，则表面积(包括底面)之比$\frac{S_1}{S_2}=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{8}{5}$　　C. $\frac{20}{11}$　　D. $\frac{10}{3}$

7. 设F为抛物线$C: y^2=2x$的焦点，点P在抛物线上，点Q在准线l上，满足$PQ/\!/x$轴. 若$|PQ|=|QF|$，则$|PF|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{3}$

8. 执行如图所示的程序框图，则输出a的值为



A. $-\frac{1}{64}$

B. $-\frac{1}{32}$

C. $\frac{1}{16}$

D. $\frac{1}{32}$

9. 已知$a=\log_5 11$，$b=\log_2\sqrt{8}$，$c=\sqrt{e}$，则a，b，c的大小关系为

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<b<c$

10. 已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$2S_n=a_n(a_n+1)$，则$a_{2023}=$

A. 2022　　B. 2023　　C. 2024　　D. 2025

11. 已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0)$的图象在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$内有且仅有一条对称轴，则$f\left(\frac{\pi}{8}\right)$的最小值为

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

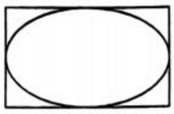
12. 已知斜率为$\sqrt{3}$的直线l经过双曲线$C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点$F$，交双曲线$C$的右支于$A$，$B$两点，且$\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{FB}$，则双曲线的离心率为

A. $\frac{6}{5}$　　B. $\frac{7}{5}$　　C. $\frac{10}{7}$　　D. $\frac{4}{3}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y\geqslant 1, \\ x-y\leqslant 1, \\ y-1\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值为________.

14. 如图，矩形长为 $a(a>0)$，宽为 3，在矩形内随机地撒 300 颗黄豆，数得落在椭圆外的黄豆数为 96 颗，以此试验数据为依据可以估计出椭圆的面积约为 10.2，则 $a=$________.



15. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)+f(x+1)=f(2)=1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2023} f(k)=$________.

16. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $\sqrt{3}$，动点 P 在 $\triangle AB_1C$ 内，满足 $D_1P=\sqrt{5}$，则点 P 的轨迹长度为________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）

清明节，又称踏青节、行清节、三月节、祭祖节等，是传统的重大春祭节日，扫墓祭祀、缅怀祖先，是中华民族自古以来的优良传统. 某社区进行流动人口统计，随机抽取了 100 人了解他们今年是否回老家祭祖，得到如下不完整的 2×2 列联表：

	回老家	不回老家	总计
50 周岁及以下		55	
50 周岁以上	15		40
总计			100

(1)根据统计完成以上 2×2 列联表，并根据表中数据估计该社区流动人口中 50 周岁以上的居民今年回老家祭祖的概率；

(2)能否有 99.9%的把握认为回老家祭祖与年龄有关？

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\dfrac{a_{n+1}}{3a_n}=1+\dfrac{1}{n}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

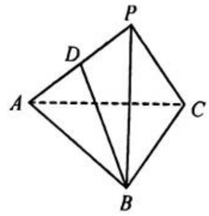
(2)求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

19.(本小题满分12分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,侧面 $PAC\perp$ 底面 ABC,且 $\triangle ABC$ 为边长为4的等边三角形,$PA\perp PC$,$\angle PAC=\frac{\pi}{6}$,D 为 PA 中点.

(1)求证:$AP\perp BD$;

(2)求点 D 到平面 PBC 的距离.



20.(本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}+1$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$ 的最小值;

(2)若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^3},+\infty\right)$ 上恰有一个零点,求实数 a 的取值范围.

21.(本小题满分12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 $M\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)若直线 $l:y=x+m$ 与椭圆 C 交 y 轴右侧于不同的两点 A,B,试问:$\triangle MAB$ 的内心是否在一条定直线上?若是,请求出该直线方程;若不是,请说明理由.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分10分)**选修4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数).以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=-2\sin\theta$.

(1)求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2)设直线 $l:\sqrt{3}x+y=0$ 与曲线 C_1,C_2 分别交于 A,B 两点(异于极点),求线段 AB 的长度.

23.(本小题满分10分)**选修4-5:不等式选讲**

已知 $a>0,b>0$,函数 $f(x)=|x+a|+|x-b|$ 的最小值为2,证明:

(1)$3a^2+b^2\geqslant 3$;

(2)$\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b}\geqslant 3$.

2023年普通高等学校全国统一模拟招生考试

新未来5月联考·文科数学

参考答案、提示及评分细则

1.【答案】B

【解析】$\because B=\{x|-1<x<3\}$，$\therefore A\cap B=\{0,2\}$. 故选 B.

2.【答案】C

【解析】依题意，$z=\mathrm{i}$，$\therefore z^{2023}=\mathrm{i}^{2022}\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}$. 故选 C.

3.【答案】A

【解析】由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，有 $\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}$，解得 $bc=4$，又 $b+c=6$，有 $a=\sqrt{b^2+c^2-bc}=\sqrt{(b+c)^2-3bc}=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$. 故选 A.

4.【答案】C

【解析】选项 A，2023 年 1—2 月份，商品零售总额同比增长 2.9%，错误；
选项 B，2022 年 8 月份，餐饮收入总额同比增速增加，错误；
选项 C，2022 年 6—10 月份，商品零售总额同比增速都增加，正确；
选项 D，2022 年 12 月，餐饮收入总额环比增速并未告知，错误. 故选 C.

5.【答案】C

【解析】依题意，$\left|\frac{5}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{9}\boldsymbol{a}^2-\frac{10}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{25-\frac{10}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+64}=7$，

$\therefore 25-\frac{10}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+64=49$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$. 故选 C.

6.【答案】B

【解析】$\because \frac{H_1}{H_2}=2$，$H_1+H_2=2R$，$\therefore H_1=\frac{4}{3}R$，$H_2=\frac{2}{3}R$，$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\dfrac{2\pi R\cdot\frac{4}{3}R+\pi\left[R^2-\left(\frac{1}{3}R\right)^2\right]}{2\pi R\cdot\frac{2}{3}R+\pi\left[R^2-\left(\frac{1}{3}R\right)^2\right]}=\frac{8}{5}$. 故选 B.

7.【答案】A

【解析】依题意，$|PQ|=|QF|=|PF|$，$\triangle PQF$ 为等边三角形，$\therefore |PF|=|PQ|=4|OF|=2$. 故选 A.

8.【答案】A

【解析】第一次循环：$a=\cos\frac{\pi}{7}$，$n=1$；第二次循环：$a=\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}$，$n=2$；第三次循环：$a=\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}$，$n=3$；……，第 6 次循环：$a=\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{8\pi}{7}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{2^5\pi}{7}$，$n=6$.

$\therefore \cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{8\pi}{7}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{2^5\pi}{7}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{8\pi}{7}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{32\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$

$=\dfrac{\sin\frac{64\pi}{7}}{64\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{64}$. 故选 A.

9.【答案】D

【解析】$a=\log_5 11=\log_5\sqrt{121}<\log_5\sqrt{125}=\frac{3}{2}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=\sqrt{\mathrm{e}}>\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$，$\therefore c>b>a$. 故选 D.

10.【答案】B

【解析】由题意，$2S_n=a_n^2+a_n$，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}(n\geq2)$，两式相减，得 $2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，
$\therefore a_n^2-a_{n-1}^2=a_n+a_{n-1}$. $\because a_n>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=1$. 当 $n=1$ 时，$2S_1=a_1^2+a_1$，$\therefore a_1=1$，
$\therefore \{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列. $\therefore a_{2023}=2023$. 故选 B.

11.【答案】B

【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$2\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\right)$，

∵函数 $f(x)$ 的图象在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内有且仅有一条对称轴,∴ $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}$,即 $\frac{2}{3}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$,

∴ $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$,∴ $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. 故选 B.

12.【答案】C

【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+c$,其中 $c^2=a^2+b^2$,

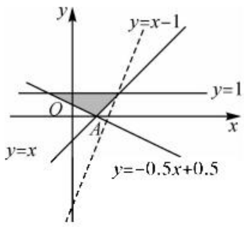
联立 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+c,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(b^2-3a^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy+3b^4=0$. ∴ $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{3}b^2c}{b^2-3a^2}$,$y_1y_2=\frac{3b^4}{b^2-3a^2}$,

由 $\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{FB}$,得 $y_1=-6y_2$,即 $\frac{y_1}{y_2}=-6$,∴ $\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}=-\frac{37}{6}$,即 $\frac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=-\frac{25}{6}$,

∴ $\frac{\left(-\frac{2\sqrt{3}b^2c}{b^2-3a^2}\right)^2}{\frac{3b^4}{b^2-3a^2}}=\frac{4c^2}{b^2-3a^2}=-\frac{25}{6}$,整理得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{100}{49}$,∴离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{7}$. 故选 C.

13.【答案】3

【解析】如图,由约束条件可得可行域的区域,结合图象可知,当直线 l 过点 $(2,1)$ 时,z 取得最大值,∴ $z_{\max}=3$.



14.【答案】5

【解析】因为矩形的面积为 $3a$,则 $\frac{300-96}{300}=\frac{10.2}{3a}$,解得 $a=5$.

15.【答案】1012

【解析】依题意,$f(x+3)+f(x+1)=f(2)=1$. ∴ $f(x+1)+f(x-1)=f(2)=1$. ∴ $f(x+3)=f(x-1)$,即 $f(x+4)=f(x)$,∴ $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 令 $x=-1$,得 $f(2)+f(0)=f(2)$,∴ $f(0)=0=f(4)$. 令 $x=0$,则 $f(3)+f(1)=f(2)$,∴ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2f(2)=2$. ∴ $\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=505\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+[f(1)+f(2)+f(3)]=1012$.

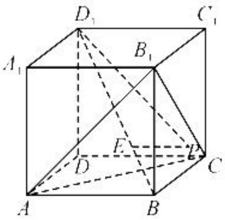
16.【答案】$\frac{\pi}{2}$

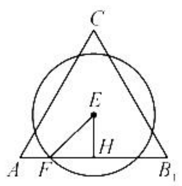
【解析】设点 E 为 D_1B 与平面 AB_1C 的交点,则 $D_1E=\frac{2}{3}D_1B=2$,且 $D_1E\perp$ 平面 AB_1C.

∴易知 $EP=\sqrt{D_1P^2-D_1E^2}=1$,∴点 P 的轨迹是平面 AB_1C 上是以 1 为半径的圆弧.

∵△AB_1C 内切圆半径 $EH=\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,∴ $\cos\angle HEF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\angle HEF=\frac{\pi}{4}$.

∴圆在三角形内的圆弧为圆周长的 $\frac{1}{4}$,∴点 P 的轨迹长度为 $\frac{1}{4}\cdot2\pi\cdot1=\frac{\pi}{2}$.





17.【答案】(1)列联表见解析;所求概率为 $\frac{3}{8}$　(2)有 99.9% 的把握认为是否回老家祭祖与年龄有关

【解析】(1)补全表格如下:

	回老家	不回老家	总计
50 周岁及以下	5	55	60
50 周岁以上	15	25	40
总计	20	80	100

…………………………………………………………………………………………… 4 分

该社区中 50 周岁以上的居民今年回老家祭祖的概率为 $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$；…… 6 分

(2) ∵ $K^2=\frac{100\times(5\times25-15\times55)^2}{20\times80\times60\times40}=\frac{1225}{96}\approx12.760>10.828$，…… 10 分

∴有 99.9%的把握认为是否回老家祭祖与年龄有关. …… 12 分

18.【答案】(1) $a_n=n\times3^{n-1}$　(2) $S_n=\frac{(2n-1)\times3^n+1}{4}$

【解析】(1)由 $\frac{a_{n+1}}{3a_n}=1+\frac{1}{n}$，得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=3\times\frac{a_n}{n}$，…… 3 分

又 $\frac{a_1}{1}=1$，∴ $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，…… 4 分

∴ $\frac{a_n}{n}=3^{n-1}$，$a_n=n\times3^{n-1}$；…… 6 分

(2) $S_n=1\times3^0+2\times3^1+\cdots+n\times3^{n-1}$，①

①×3 得 $3S_n=1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$，② …… 9 分

①－②得 $-2S_n=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times3^n=\frac{1-3^n}{1-3}-n\times3^n=\frac{3^n-1}{2}-n\times3^n$，

∴ $S_n=\frac{(2n-1)\times3^n+1}{4}$. …… 12 分

19.【答案】(1)略　(2) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$

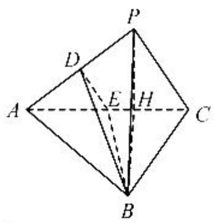
【解析】(1)证明：如图，取 AC 中点 E，连接 DE，BE，

∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，∴ $BE\perp AC$. …… 2 分

又侧面 $PAC\perp$ 底面 ABC，$BE\subset$ 底面 ABC，侧面 $PAC\cap$ 底面 $ABC=AC$，

∴ $BE\perp$ 平面 PAC. ∵ $PA\subset$ 平面 PAC，∴ $BE\perp PA$.

又 D，E 分别为 PA，AC 中点，∴ $DE/\!/PC$. …… 4 分



又 $PA\perp PC$，∴ $PA\perp DE$.

∵ $DE\cap BE=E$，DE，$BE\subset$ 平面 BDE，∴ $PA\perp$ 平面 BDE.

又 $BD\subset$ 平面 BDE，∴ $PA\perp BD$；…… 6 分

(2)由(1)可知 $AB=AC=BC=1$，$PC=2$，

过点 P 作 $PH\perp AC$，垂足为 H，由 $AP=2\sqrt{3}$，$PC=2$，$\angle APC=90^\circ$，有 $PH=\sqrt{3}$，$CH=1$，$HB=\sqrt{BC^2+CH^2-BC\times CH}=\sqrt{16+1-1}=\sqrt{13}$，$BP=\sqrt{HP^2+HB^2}=\sqrt{3+13}=1$.

∴ $S_{\triangle PBC}=\sqrt{15}$. …… 9 分

又易知点 P 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABC}=1\sqrt{3}$，∴ $V_{三棱锥P-ABC}=\frac{1}{3}\times1\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$. …… 10 分

∴点 A 到平面 PBC 的距离为 $\frac{1\times3}{\sqrt{15}}=\frac{1\sqrt{15}}{5}$，∴点 D 到平面 PBC 的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. …… 12 分

20.【答案】(1)2　(2) $a=\frac{1}{e^2}$ 或 $a\leqslant\frac{2}{e^3}$

【解析】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$. …… 1 分

易知函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. …… 3 分

∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，同时也是最小值.

∴函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=2$；…… 4 分

(2)令 $f(x)=0$，得 $x(\ln x+1)+a=0$.

令 $g(x)=x(\ln x+1)+a$，则函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^3},+\infty\right)$ 上的零点即为函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^3},+\infty\right)$ 上的零点.

$g'(x)=\ln x+2$，∵当 $x\in\left(\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^2}\right)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，

∴ $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 上单调递增，…… 6 分

∴当 $x=\frac{1}{e^2}$ 时，$g(x)$ 取极小值 $g\left(\frac{1}{e^2}\right)=a-\frac{1}{e^2}$，…… 7 分

①当 $a>\frac{1}{e^2}$ 时，$g(x)\geqslant g\left(\frac{1}{e^2}\right)=a-\frac{1}{e^2}>0$，故 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^3},+\infty\right)$ 上无零点；…… 8 分

②当 $a=\frac{1}{e^2}$ 时，$g(x)\geqslant g\left(\frac{1}{e^2}\right)=a-\frac{1}{e^2}=0$，故 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^3},+\infty\right)$ 上有一个零点；…… 9 分

③当$\frac{2}{e^3}<a<\frac{1}{e^2}$时,∵$g\left(\frac{1}{e^3}\right)=a-\frac{2}{e^3}>0$,$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=a-\frac{1}{e^2}<0$,$g(1)=1+a>0$,∴$g(x)$在$\left(\frac{1}{e^3},+\infty\right)$上有两个零点; …… 10分

④当$a\leqslant\frac{2}{e^3}$时,$g\left(\frac{1}{e^3}\right)=a-\frac{2}{e^3}\leqslant 0$,$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=a-\frac{1}{e^2}<0$,$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$. ∴$g(x)$在$\left(\frac{1}{e^3},+\infty\right)$上有一个零点, …… 11分

综上,当$a=\frac{1}{e^2}$或$a\leqslant\frac{2}{e^3}$时,$g(x)$在$\left(\frac{1}{e^3},+\infty\right)$上有一个零点. …… 12分

21.【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　(2)△MAB的内心在定直线$x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$上

【解析】(1)依题意,$\begin{cases}\frac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}{b^2}=1,\\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=2,\end{cases}$ …… 3分

∴椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$; …… 4分

(2)联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=x+m,\end{cases}$得$3x^2+4mx+2m^2-4=0$,

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$,$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{3}$, …… 6分

∴$y_1+y_2=x_1+x_2+2m=\frac{2m}{3}$,$x_1y_2+x_2y_1=x_1(x_2+m)+x_2(x_1+m)=2x_1x_2+m(x_1+x_2)=-\frac{8}{3}$. …… 8分

∴$k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{x_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}}+\frac{y_2-\frac{\sqrt{6}}{3}}{x_2-\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{x_1y_2+x_2y_1-\frac{\sqrt{6}}{3}(x_1+x_2)-\frac{2\sqrt{6}}{3}(y_1+y_2)+\frac{8}{3}}{\left(x_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x_2-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}$. …… 10分

又$x_1y_2+x_2y_1-\frac{\sqrt{6}}{3}(x_1+x_2)-\frac{2\sqrt{6}}{3}(y_1+y_2)+\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}+\frac{4\sqrt{6}m}{9}-\frac{4\sqrt{6}}{9}m+\frac{8}{3}=0$.

∴$k_{MA}+k_{MB}=0$恒成立.

故∠AMB的平分线总垂直于x轴.∴△MAB的内心在定直线$x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$上. …… 12分

22.【答案】(1)曲线C_1:$\rho=2\cos\theta$;曲线C_2:$x^2+(y+1)^2=1$　(2)$\sqrt{3}-1$

【解析】(1)曲线C_1:$\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数),消去参数得$(x-1)^2+y^2=1$. …… 2分

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入,得曲线$C_1$的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta$. …… 4分

由$\rho=-2\sin\theta$得$\rho^2=-2\rho\sin\theta$.∴$x^2+y^2=-2y$.

∴曲线C_2的直角坐标方程为$x^2+(y+1)^2=1$; …… 5分

(2)易知直线l的极坐标方程为$\theta=-\frac{\pi}{3}$. …… 7分

代入曲线C_1,C_2的极坐标方程得$\rho_1=1$,$\rho_2=\sqrt{3}$. …… 9分

∴$|AB|=\sqrt{3}-1$. …… 10分

23.【答案】(1)略　(2)略

【解析】由于$a>0$,$b>0$,则$f(x)=|x+a|+|x-b|\geqslant|a+b|=a+b$,当且仅当$-a\leqslant x\leqslant b$取等号.

故$f(x)=|x+a|+|x-b|$的最小值为$a+b=2$. …… 2分

证明:(1)∵$a>0$,$b>0$,$a+b=2$,∴$0<a<2$,$0<b<2$, …… 3分

∴$3a^2+b^2=3a^2+(2-a)^2=4a^2-4a+4=(2a-1)^2+3\geqslant 3$,

当且仅当$a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{3}{2}$时取等号; …… 6分

(2)∵$a+b=2$,∴$a+1+b=3$, …… 7分

∴$\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}(a+1+b)\left(\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{4b}{a+1}+\frac{a+1}{b}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\frac{4b}{a+1}\cdot\frac{a+1}{b}}\right)=3$, … 9分

当且仅当$\frac{4b}{a+1}=\frac{a+1}{b}$,即$a=b=1$时取等号. …… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。