成都七中(高新校区)高2021级高三上期入学考试

答案与解析

1	2	3	4	5	6
D	C	B	C	D	A
7	8	9	10	11	12
B	C	A	B	D	C

13. 16　　14. 23　　15. 3　　16. $\frac{3}{2}n(n+1)+1$

11. 解：

②：设多边形顶点坐标为 (x_i, y_i)，其中 $i = 1,2,3 \dots n$

设"等线"方程为 $y - kx - b = 0$，则 (x_i, y_i) 到等线的距离为：

$$d_i = \frac{|y_i - kx_i - b|}{\sqrt{1+k^2}}$$

又因为等线将顶点分为上下两部分，则有

$$\sum d_{\text{上部分}} = \sum \frac{y_i - kx_i - b}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\sum d_{\text{下部分}} = \sum -\frac{y_i - kx_i - b}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\sum d_{\text{上部分}} = \sum d_{\text{下部分}}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - kx_i - b}{\sqrt{1+k^2}} = 0$$

整理得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = k \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + b$$

即等线l必过该多边形重心.

①：设$P(x_0, y_0)$. 易知过P点切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$，渐近线方程为$y = \pm\frac{b}{a}x$.

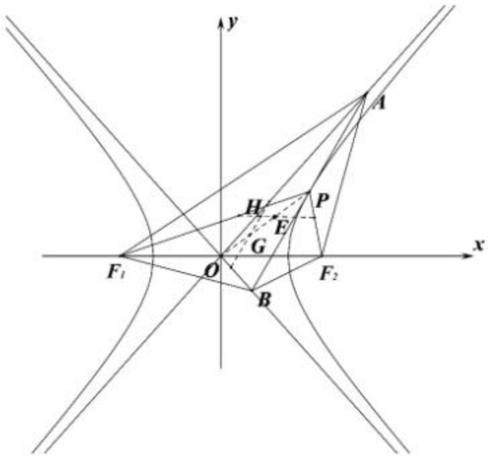
联立两直线方程得

$$x_A = \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}, x_B = \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}$$

故有

$$x_A + x_B = \frac{2x_0}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} = 2x_0$$

故 $|PA| = |PB|$



③④：下考察ΔPF_1F_2重心，设$P(x_0, y_0)$则重心$G(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3})$. 对于四边形$AF_1BF_2$，其重心$H$必在$\Delta AF_1F_2$与$\Delta BF_1F_2$重心连线上，也必在$\Delta AF_1B$与$\Delta AF_2B$重心连线上，则$l$即为直线$GH$。易知过$P$点切线方程为$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$

$GH \parallel AB$且过$G(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3})$，则直线$l$方程为$\frac{3x_0x}{a^2} - \frac{3y_0y}{b^2} = 1$

易知该方程为$\frac{3x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2} = 1$切线方程.

故①②③正确.

12. 由正弦定理

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ ①$$

又由

$$S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{ac\sin B}{2}=\frac{bc\sin A}{2}\ ②$$

联立①②整理得

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C\ ③$$

由内接圆

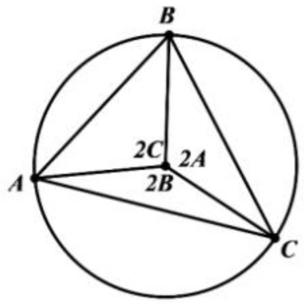
$$S=\frac{r}{2}(a+b+c)\ ④$$

联立①④整理得

$$S=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)\ ⑤$$

又由下图易知

$$S=\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)\ ⑥$$



由③⑤⑥有

$$S=\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=2R^2\sin A\sin B\sin C=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)\ ⑦$$

将⑦代入 y 整理有

$$y=\frac{R^2}{S}+\frac{S}{r^2}=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2+1}{2\sin A\sin B\sin C}$$

且由⑦结合已知条件有

$$\sin A\sin B\sin C=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{4}=\frac{1}{2}$$

故

$$y=(\sin A+\sin B+\sin C)^2+1$$

因为在任意三角形中有

$$2<\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

代入有

$$5<y\le\frac{31}{4}$$

故 y 可能为 6, 7.

又由

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{2\sin B\sin C}+\sin B+\sin C\ge\frac{1}{2\sin B\sin C}+2\sqrt{\sin B\sin C}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{2}}>\sqrt{5}$$

故有

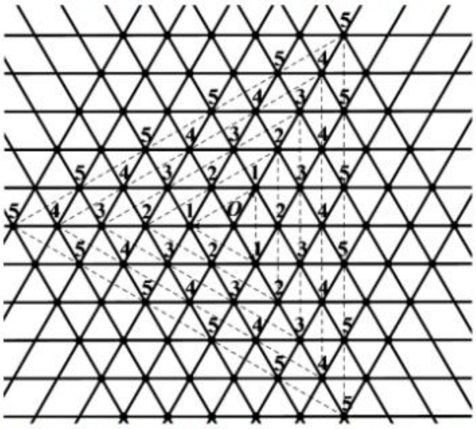
$$y>5+1=6$$

所以 y 的唯一整数解为 7.

*说明：本题运用放缩夹逼的必要性思想得到答案，而在 $\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{2}$ 时，$\sin A+\sin B+\sin C$ 的具体取值范围可证明能够使得充分性成立.

15. 易知当 $x<1$ 或 $x>3$ 时方程必无解.
故 $[x]=1,2,3$.
当 $[x]=1$ 时，解得 $x=1$；
当 $[x]=2$ 时，解得 $x=\sqrt{5}$；
当 $[x]=3$ 时，解得 $x=3$；
综上，该方程解为 $x=1,\sqrt{5},3$.
共 3 个解.

16. 解：题目可以看作在集合 $B=\{\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_3}\}$ 中选取 $1,2,\cdots,n$ 次向量，所得到的不同向量的和.
现在一六边形格点中表示所述情况如下图所示.



图中所标数字 i 即为选取 i 次向量时所新增的不同的向量.
由图易知第 i 次选取增加 $3i$ 个向量.
则总共有

$$1+3+6+\cdots 3n=\frac{3}{2}n(n+1)+1$$

个不同向量
故答案为 $\frac{3}{2}n(n+1)+1$.

17. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\left(n-\frac{3}{2}\right)2^n+\frac{3}{2}$
解：
(1) 由正项等差数列有公差 $d>0$，又有

$$\cos(2\pi a_{n+1})=\cos(2\pi a_n)$$

故有

$$2\pi a_{n+1}=2\pi a_n+2k\pi \text{ 或 } 2\pi a_n+2\pi a_{n+1}=k\pi$$

其中 $k\in\mathbb{Z}$.
当 $2\pi a_{n+1}=2\pi a_n+2k\pi$ 时，公差 $d_{min}=1$；
当 $2\pi a_n+2\pi a_{n+1}=k\pi$ 时，公差 $d_{min}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $\cos(2\pi a_n)=0$ 时成立.
故 $d_{min}=\frac{1}{2}$.
(2) 由题意知，此时 $a_n=\frac{n}{2}-\frac{1}{4}$.
令 $b_n=a_n\cdot 2^n=(\frac{n}{2}-\frac{1}{4})2^n$
令 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=(\frac{1}{2}\cdot 2^1+\frac{2}{2}\cdot 2^2+\cdots+\frac{n}{2}\cdot 2^n)-\frac{1}{4}(2^1+2^2+\cdots+2^n)$$

整理得 $S_n=\left(n-\frac{3}{2}\right)2^n+\frac{3}{2}$，其中 $n\in\mathbb{N}^*$.

18. (1) 见详解 (2) $\frac{3}{7}$

解：
(1) 由正视图、侧视图可知，BD，AC，EF 两两垂直且交于一点 O.
又知 $BO:OD = EO:OF$，故 $DF \parallel BE$.
由 $BE \subset$ 面BEC，故有$DF \parallel$ 面 BEC.
(2) 以 O 为原点，$\overrightarrow{OC}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{OD}$ 为 y 轴正方向，$\overrightarrow{OE}$ 为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系.
则 $C(2,0,0)$，$D(0,3,0)$，$E(0,0,1)$，$F(0,0,-3)$.
$\overrightarrow{DE} = (0,-3,1)$，$\overrightarrow{CD} = (-2,3,0)$，$\overrightarrow{EF} = (0,0,-4)$；
面 CDE 法向量 $\overrightarrow{n_1} = (3,2,6)$；
面 DEF 法向量 $\overrightarrow{n_2} = (1,0,0)$；
故

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{3}{7}$$

故二面角 $C-DE-F$ 的余弦值为$\frac{3}{7}$.

19. (1) $a < -2$ (2) 0
解：
(1)

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 1 + \frac{1}{x^2}$$

知 $f(1) = 0$.
故只需使 $f'(x) = 0$ 在 $(0,+\infty)$ 各有两解即可.
即 $a^2 - 4 > 0$ 且 $a < 0$.
即 $a < -2$.
(2)
当 $a < -2$ 时，$f'(1) < 0$.
故 $x_2 = 1$，$x_1 < 1 < x_3$.
又知当 $f(x_1) = 0$ 时，有

$$a\ln x_1 + x_1 - \frac{1}{x_1} = 0$$
$$a\ln\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - x_1 = 0$$

即 $f\left(\frac{1}{x_1}\right) = 0$
故$x_1x_3 = 1$.
则 $f(x)$ 在 $x = x_1$处的切线方程为

$$y = \left(\frac{a}{x_1} + 1 + \frac{1}{{x_1}^2}\right)x + a\ln x_1 - a - \frac{2}{x_1}$$

代入 $f(x_1) = 0$ 有

$$y = \left(\frac{a}{x_1} + 1 + \frac{1}{{x_1}^2}\right)x - x_1 - a - \frac{1}{x_1}$$

$f(x)$ 在 $x = x_3$处的切线方程为

$$y = (ax_1 + 1 + {x_1}^2)x - x_1 - a - \frac{1}{x_1}$$

联立整理得两直线交点横坐标 $x_T = 0$.
故到 y 轴距离为 0.

20. (1) 见详解 (2) 不存在，理由见详解
解：
(1) 曲线 $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4-k} = 1$ 在点 (x_0, y_0) 的切线方程为 $y = \frac{4-k}{y_0} - \frac{x_0(4-k)}{y_0 k}x$.
当 $\left|\frac{x_0(4-k)}{y_0 k}\right| = 1$ 时，联立 $\frac{{x_0}^2}{k} + \frac{{y_0}^2}{4-k} = 1$ 得

$|x_0|=\frac{k}{2}$，$|y_0|=|\frac{4-k}{2}|$.
故点 (x_0,y_0) 在 $|y|=|x|-2$ 上，即曲线 C 与 $y=|x|-2$ 相切.
而此时 $k>0$ 且 $k\neq 4$.
故$y=|x|-2$ 总与 C_1 和 C_2 相切.
(2) 设直线 $l: y=kx+m$.
设 l 与 C_1 交于 $P(x_1,y_1)$ 和 $Q(x_2,y_2)$，联立得

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{k^2}{4-a}\right)x^2+\frac{2km}{4-a}x+\frac{m^2}{4-a}-1=0$$

由韦达定理得

$$x_1+x_2=\frac{-2km}{\frac{4-a}{a}+k^2}\quad,\quad x_1x_2=\frac{m^2-4+a}{\frac{4-a}{a}+k^2}$$

由题意，

$$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{\frac{4-a}{2}-y_1}{\frac{a}{2}-x_1}+\frac{\frac{4-a}{2}-y_2}{\frac{a}{2}-x_2}$$

代入整理得

$$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{\frac{a^2}{2}(1-k^2)+a(2k^2-km+2k+m-4)+(m-2)(4k-4)}{\frac{a^2}{4}(k^2-1)+a(km+2)+(m+2)(m-2)}$$

因为 $k_{AP}+k_{AQ}+k_{BP}+k_{BQ}$ 为定值对任意 a,b 均成立，故 $k_{AP}+k_{AQ}$ 为定值与 a 无关，$k_{BP}+k_{BQ}$ 为定值与 b 无关.
1°当 $1-k^2\neq 0$ 时，必有

$$\frac{\frac{1}{2}(1-k^2)}{\frac{1}{4}(k^2-1)}=\frac{2k^2-km+2k+m-4}{km+2}=\frac{(m-2)(4k-4)}{(m+2)(m-2)}$$

此时 $m\neq 2$.
故有

$$\frac{4k-4}{m+2}=\frac{2k^2-km+2k+m-4}{km+2}=2$$

代入解得 $k=\pm 1$，矛盾.
2°当 $1-k^2=0$ 时，$k=1$ 且 $m=2$ 时成立.
此时直线 $l: y=x-2$，由 (1) 知与曲线仅有 1 交点，矛盾.
故不存在 l，使 $k_{AP}+k_{AQ}+k_{BP}+k_{BQ}$ 为定值对任意 a,b 均成立.

21. (1) 2^n (2) 见详解
解：
(1) 对于 n 维坐标 $(a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n)$，$a_i$ 有 $\{0,1\}$ 两种选择 $(1\le i\le n, i\in\mathbb{N})$.
故共有 2^n 种选择，即 2^n 个顶点.
(2) ①对于 $X=k$ 的随机变量，在坐标 $(a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots,b_n)$ 中有 k 个坐标值不同，即 $a_i\neq b_i$，剩下 $n-k$ 个坐标值满足 $a_i=b_i$.
此时所对应情况数为 $C_n^k\cdot 2^{n-1}$ 种.
即

$$P(X=k)=\frac{C_n^k\cdot 2^{n-1}}{C_{2^n}^2}=\frac{C_n^k}{2^n-1}$$

故分布列为：

$X=$	0	1	2	$\cdots$	n
$P=$	$\frac{C_n^0}{2^n-1}$	$\frac{C_n^1}{2^n-1}$	$\frac{C_n^2}{2^n-1}$	$\cdots$	$\frac{C_n^n}{2^n-1}$

数学期望

$$E(X)=\frac{0\cdot C_n^0}{2^n-1}+\frac{1\cdot C_n^1}{2^n-1}+\frac{2\cdot C_n^2}{2^n-1}+\cdots+\frac{n\cdot C_n^n}{2^n-1}$$

倒序相加得

$$E(X)=\frac{n}{2(2^n-1)}(C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)=\frac{n}{2(1-2^{-n})}$$

即$E(X)=\frac{n}{2(1-2^{-n})}$.

②当 n 足够大时，$E(X)\approx\frac{n}{2}$.

设正态分布 $N\sim(\frac{n}{2},\left(\frac{n}{2}\right)^2)$，正态分布曲线为 $f(x)$，由定义知该正态分布期望为$\frac{n}{2}$，方差为$\left(\frac{n}{2}\right)^2$.

设题中分布列所形成的曲线为 $g(x)$.

则当 $g(x)$ 与 $f(x)$ 均在 $x=\frac{n}{2}$ 处取最大值，若当 $g\left(\frac{n}{2}\right)>f\left(\frac{n}{2}\right)$时，且 $g(\infty)<f(\infty)$，则可认为方差 $D(X)<\left(\frac{n}{2}\right)^2$.

Ⅰ. $g(\infty)<f(\infty)$：当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{2}{e\pi}}\cdot\frac{2^x-1}{x}>1$$

即 $g(\infty)<f(\infty)$.

Ⅱ. $g\left(\frac{n}{2}\right)>f\left(\frac{n}{2}\right)$

$$\frac{g\left(\frac{n}{2}\right)}{f\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n\cdot C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n-1}$$

当 n 足够大时，有

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n\cdot C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n-1}\approx\frac{n\cdot C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n-1}=h(n)$$

当 $n=2k(k\in\mathbb{N})$ 时，

$$\frac{h(n+1)}{h(n)}=\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(\frac{2C_{2k+1}^k}{2C_{2k}^k}\right)=\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(1+\frac{C_{2k}^{k-1}}{C_{2k}^k}\right)>1$$

当 $n=2k+1(k\in\mathbb{N})$ 时，

$$\frac{h(n+1)}{h(n)}=\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\left(\frac{2C_{2k+1}^k}{2C_{2k+1}^k}\right)>1$$

故 $g\left(\frac{n}{2}\right)>f\left(\frac{n}{2}\right)$.

综上所述，可以认为 $D(X)<\frac{n^2}{4}$.

22. (1)$\frac{(x+1)^2}{2}+y^2=1$；$\frac{4\sqrt{2}}{7}+\frac{2}{7}$ (2)$\frac{15}{7}\sqrt{2}-\frac{3}{7}$

解：

(1)

当$\theta=\frac{\pi}{3}$时，

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{2}-cos\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{7}+\frac{2}{7}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

即曲线 C 的直角坐标方程为

$$\frac{(x+1)^2}{2}+y^2=1$$

(2)

$$f(\theta)=|OP|+|OQ|+|OR|=\frac{1}{\sqrt{2}-cos\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

令 $t=cos\theta$ 整理得

$$f(t)=\frac{21}{(4t^2+4\sqrt{2}t+5)(\sqrt{2}-t)}$$

令 $g(t)=(4t^2+4\sqrt{2}t+5)(\sqrt{2}-t)$

$$g'(t)=-12t^2+3$$

故 $g(t)$ 在 $(-1,-\frac{1}{2})\downarrow$，$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\uparrow$，$(\frac{1}{2},1)\downarrow$.

$f(t)$ 最小即 $g(t)$ 最大即 $t=\frac{1}{2}$ 时取得

此时$|OP|+|OQ|+|OR|=\frac{15}{7}\sqrt{2}-\frac{3}{7}$.

23. (1) 见详解 (2) 见详解

解：

(1) 设向量 $\vec{m}=(a,b)$，向量 $\vec{n}=(c,d)$.

则有$\vec{m}\cdot\vec{n}\le|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|$

即为$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\ge ac+bd$.

当且仅当 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 同向共线时取等即 $ad=bc$ 时取等.

(其他证明方法合理得分)

(2) 欲证 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

即证$(a+c)^2+(b+d)^2\le a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

即为$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\ge ac+bd$.

由(1)得证，取等条件同(1).

(其他证明方法合理得分)

关于我们

全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。