自主选拔在线 www.zizzs.com

专注中学拔尖人才培养

天壹名校联盟·2023届高三2月质量检测

数　学

本试卷共4页。全卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若集合 $M=\{x|\log_2 x<2\}$，$N=\{y|y=2^x,x\geqslant1\}$，则 $M\cap N=$

A. $[1,4)$　　B. $(0,2]$　　C. $\varnothing$　　D. $[2,4)$

2. 欧拉恒等式 $e^{i\pi}+1=0$（i 为虚部单位，e 为自然对数的底数）被称为数学中最奇妙的公式．它是复分析中欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 的特例：当自变量 $x=\pi$ 时，$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，得 $e^{i\pi}+1=0$．根据欧拉公式，复数 $e^{i\frac{2023\pi}{4}}$ 的虚部为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

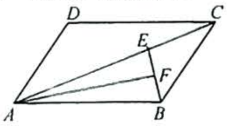
3. 甲、乙、丙三人各进行一次打靶，三人打中的概率分别为0.8，0.8，0.7，则三人中至少有一人打中的概率为

A. 0.988　　B. 0.96　　C. 0.948　　D. 0.448

4. 已知 α,β 均为锐角，且 $\sin\alpha=2\sin\beta$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos\beta$，则 $\sin(\alpha-\beta)=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

5. 在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是对角线 AC 上靠近点 C 的三等分点，点 F 在 BE 上，若 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，则 $x=$



A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{6}{7}$

6. 已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega<0)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，则实数 ω 的取值范围是

A. $\left[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{3},0\right)$　　C. $\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-\frac{5}{6},-\frac{2}{3}\right]$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=2023$，若存在正偶数 m 使得 $(-1)^1a_1^2+(-1)^2a_2^2+\cdots+(-1)^m a_m^2+m=2022a_1a_2\cdots a_m$ 成立，则 $m=$

A. 2016　　B. 2018　　C. 2020　　D. 2022

1
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

8. 已知 $a=2.1^{2.3}$, $b=2.2^{2.2}$, $c=2.3^{2.1}$, 则 a,b,c 的大小关系是(参考数据 $\ln 2.5\approx0.916$) B

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 下列命题中正确的是 AB

A. 已知一组数据 6,6,7,8,10,12,则这组数据的 50%分位数是 7.5

B. 已知随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$,且 $P(X>3)=0.3$,则 $P(1<X<2)=0.2$

C. 已知随机变量 $Y\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right)$,则 $E(Y)=\frac{5}{2}$

D. 已知经验回归方程 $\hat{y}=-2x+3$,则 y 与 x 具有负线性相关关系

10. 已知抛物线 $C: x=\frac{1}{4}y^2$ 的焦点为 F,过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A,B 两点,O 为坐标原点,直线 OA,OB 的斜率分别为 k_1,k_2,则下列说法正确的是

A. 抛物线开口向右,焦点坐标为(1,0)　　B. C 的准线方程为 $y=-1$

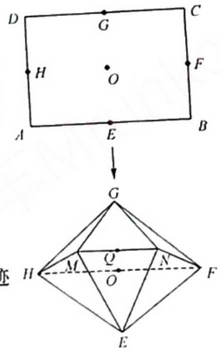
C. $|AB|$ 的最小值为 4　　D. $k_1\cdot k_2=-4$

11. "新高考"后,普通高考考试科目构成实行"3+1+2"模式,"2"就是考生在思想政治、地理、化学、生物这 4 门科目中选择 2 门作为再选科目. 甲、乙两名同学各自从这 4 门科目中任意挑选两门科目学习,设 A 表示事件"甲乙两人所选科目恰有一门相同",B 表示事件"甲乙两人所选科目完全不同",C 表示事件"甲乙两人所选科目完全相同",D 表示事件"甲乙两人均选择生物",则 ABC

A. A 与 B 为对立事件　　B. B 与 D 为互斥事件

C. C 与 D 相互独立　　D. A 与 D 相互独立

12. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=\sqrt{2}AD=4$,E,F,G,H 分别为 AB,BC,CD,AD 的中点,AC 与 BD 交于点 O,现将△AEH,△BEF,△CFG,△DGH 分别沿 EH,EF,FG,GH 把这个矩形折成一个空间图形,使 A 与 D 重合,B 与 C 重合,重合后的点分别记为 M,N,Q 为 MN 的中点,对于多面体 $MNEFGH$,下列说法正确的是



A. 异面直线 GN 与 ME 的夹角大小为 60°

B. 该多面体的体积为 $\sqrt{2}$

C. 四棱锥 $E-MNFH$ 的外接球的表面积为 22π

D. 若点 P 是该多面体表面上的动点,满足 $PQ\perp ON$ 时,点 P 的轨迹长度为 $4+\sqrt{2}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若 $(ax-1)^7$ 的展开式中,x^4 的系数为 $-\frac{35}{16}$,则 $a=$______.

14. 若直线 $y=kx+8$ 上存在点 P,过点 P 作圆 $O: x^2+y^2=4$ [illegible]切线,A,B [illegible] $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=6$,则 k 的取值范围是______.

15. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,且满足 $f(x)+f'(x)>$ [illegible] 上恒成立,则不等式 $e^{2x}f(2x+1)>e^{2-x}f(3-x)$ 的解集是______

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$,$A,B$ 分别为其左、右顶点,对于椭圆上任意一点 P(不包括左、右顶点),直线 AP,BP 分别交直线 $l: x=9$ 于点 M,N,则以线段 MN 为直径的圆所过定点的坐标为______.

【高三数学　第 2 页(共 4 页)】

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

人们曾经相信，艺术家将是最后被 AI 所取代的职业，但技术的进步已经将这一信念敲出了裂痕，这可能是 AI 第一次引起人类的恐慌. 由 noval AI，DALL－E2 等软件创作出来的绘画作品风格各异，乍看之下，已与人类绘画作品无异. AI 会取代人类画师吗？某机构随机对 60 人进行了一次调查，统计发现认为会取代的有 42 人，30 岁以下认为不会取代的有 12 人，占 30 岁以下调查人数的 $\frac{2}{5}$.

（1）根据以上数据完成如下 2×2 列联表：

年龄	理解情况		总计
	会取代	不会取代	
30 岁以下		12	
30 岁及以上			
总计	42		60

（2）依据小概率值 $\alpha=0.010$ 的独立性检验，能否认为年龄与理解情况有关？并说明原因.

附：

α	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

18.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，满足 $b^2(\sin^2B-3\cos^2B)=-a(a+b)$，且 $\sin C=\sin 2B$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若△ABC 的面积为 $2\sqrt{3}$，求 AC 边上的中线长.

19.（本小题满分 12 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=2,a_2=-1$，且 $a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明：$\{a_{n+1}+3a_n\}$ 为等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及前 n 项和 S_n.

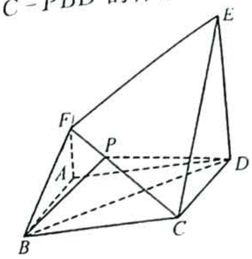
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

20.（本小题满分12分）

如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，四边形 $ADEF$ 是梯形，$AF // DE$，$AD=DE=3AF$，平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，且 $ED\perp BD$，点 P 是线段 FC 上的一点（不包括端点）.

(1) 证明：$BD\perp FC$；

(2) 若 $AF=1$，且直线 EC 与平面 PBD 所成角的大小为 $45°$，求三棱锥 $C-PBD$ 的体积.



21.（本小题满分12分）

设点 F 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的右焦点，过点 F 的直线 l 交双曲线 C 的右支于点 A，B，分别交两条渐近线于点 M，N，点 A，M 在第一象限，当 $l\perp x$ 轴时，$|AB|=6$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程；

(2) 若 $|AB|^2=60|AM|\cdot|AN|$，求直线 l 的斜率.

22.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x+1}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $k\cdot e^{f(x_1)+f(x_2)-4}+\ln\frac{k}{x_1+x_2-2}\geqslant 0$ 恒成立，求实数 k 的最小值.

官方微信公众号：zizzsw
官方网站：www.zizzs.com
咨询热线：010-5601 9830
微信客服：zizzs2018

天壹名校联盟·2023届高三2月质量检测·数学

参考答案、提示及评分细则

1.【答案】D

【解析】∵$M=\{x|\log_2 x<2\}=\{x|0<x<4\}$，$N=\{y|y=2^x,x\geqslant 1\}=\{y|y\geqslant 2\}$，∴$M\cap N=[2,4)$. 故选 D.

2.【答案】C

【解析】$e^{i\frac{2023\pi}{4}}=\cos\frac{2023\pi}{4}+i\sin\frac{2023\pi}{4}=\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$，则虚部为$-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

3.【答案】A

【解析】三人中至少有一人打中的对立事件是三人均打不中，三人均打不中的概率为$(1-0.8)\times(1-0.8)\times(1-0.7)=0.012$，所以三人中至少有一人打中的概率为$1-0.012=0.988$. 故选 A.

4.【答案】C

【解析】因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=4\sin^2\beta+\frac{1}{4}\cos^2\beta=1$，解得$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$. 故选 C.

5.【答案】C

【解析】由题可知$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，∵点 F 在 BE 上，∴$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AE}$，∴$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\lambda\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lambda\right)\overrightarrow{AD}$. ∴$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lambda=\frac{1}{3}$，$\lambda=\frac{1}{2}$. ∴$x=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$. 故选 C.

6.【答案】A

【解析】函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega<0)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，∴$\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{|\omega|}$，即$-2\leqslant\omega<0$.

当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$. 依题意，$-\pi+k\pi\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$-\frac{4}{3}+k\leqslant\omega\leqslant-\frac{2}{3}+2k$，∴当$k=0$时成立，$\omega\in\left[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right]$. 故选 A.

7.【答案】D

【解析】由题意，$a_n^2=a_{n+1}+a_n-1$，$a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}$，∴$2022a_1a_2\cdots a_m=2022\cdot\frac{a_2-1}{a_1-1}\cdot\frac{a_3-1}{a_2-1}\cdots\frac{a_{m+1}-1}{a_m-1}=a_{m+1}-1$，∵$m$为偶数，∴$(-1)^{m-1}a_{m-1}^2+(-1)^m a_m^2=-(a_m+a_{m-1}-1)+(a_{m+1}+a_m-1)=a_{m+1}-a_{m-1}$，∴左边$=a_{m+1}-a_1+m$，此时，$a_{m+1}-a_1+m=a_{m+1}-1$，∴$m=a_1-1=2022$. 故选 D.

8.【答案】B

【解析】令$f(x)=\frac{\ln(x-0.1)}{x}$，$f'(x)=\frac{\frac{x}{x-0.1}-\ln(x-0.1)}{x^2}$.

令$g(x)=\frac{x}{x-0.1}-\ln(x-0.1)$，$g'(x)=\frac{-x}{(x-0.1)^2}$，当$x>0.1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减.

又$g(e+0.1)=\frac{e+0.1}{e}-\ln e=\frac{0.1}{e}>0$，∴当$0.1<x<e+0.1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

∴$f(2.2)<f(2.3)$，即$\frac{\ln 2.1}{2.2}<\frac{\ln 2.2}{2.3}$，$2.3\ln 2.1<2.2\ln 2.2$，∴$2.1^{2.3}<2.2^{2.2}$.

同理，可知$f(x)=\frac{\ln(x+0.1)}{x}$在$(0,2.4]$上单调递增，∴$f(2.1)<f(2.2)$，即$\frac{\ln 2.2}{2.1}<\frac{\ln 2.3}{2.2}$.

∴$2.2\ln 2.2<2.1\ln 2.3$，即$2.2^{2.2}<2.3^{2.1}$.

综上所述，$a<b<c$. 故选 B.

9.【答案】ABD

【解析】对于 A 选项，$6\times50\%=3$，第 3 个和第 4 个数的平均数为 $\frac{7+8}{2}=7.5$，故 A 正确；

对于 B 选项，$P(1<X<2)=P(2<X<3)=0.5-P(X>3)=0.5-0.3=0.2$，故 B 正确；

对于 C 选项，$Y\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right)$，则 $E(Y)=np=10\times\frac{1}{2}=5$，故 C 错误；

对于 D 选项，$-2<0$，可得 y 与 x 具有负线性相关关系，可知 D 正确．故选 ABD．

10.【答案】ACD

【解析】抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$，开口向右，焦点坐标为 $(1,0)$，故 A 正确；准线方程 $x=-1$，故 B 错误；$|AB|$ 的最小值为 4，故 C 正确；当直线 AB 斜率不存在时，设 A 在第一象限，则 $A(1,2)$，$B(1,-2)$，$k_1=2$，$k_2=-2$，$k_1\cdot k_2=-4$ 当直线 AB 斜率存在时，设 AB 方程为 $y=k(x-1)$，则 $\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，则 $x_1x_2=1$，$(y_1y_2)^2=16x_1x_2$，$\therefore y_1y_2=-4$，$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-4$，故 D 正确．故选 ACD．

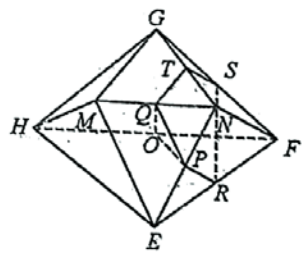
11.【答案】BD

【解析】甲、乙两名同学所选科目共有"所选科目完全不同"，"所选科目恰有一门相同"，"所选科目完全相同"这三种情况，即 A 与 B 为互斥事件但不对立，选项 A 错误；B 与 D 为互斥事件，选项 B 正确；易知 $P(A)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1}{C_4^2C_4^2}=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{C_4^2}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(C)=1-P(A)-P(B)=\frac{1}{6}$，$P(D)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{4}$，$P(CD)=\frac{C_3^1}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{12}\neq P(C)\cdot P(D)$，$P(AD)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(D)$，选项 C 错误；选项 D 正确，故选 BD．

12.【答案】AC

【解析】先求 MN 与平面 $EFGH$ 的距离，由题意可知 $GE=AD=2\sqrt{2}$，$NG=NE=2$，$\therefore NG^2+NE^2=GE^2$，$\therefore NG\perp NE$，由 $V_{F-NGE}=V_{N-GEF}$，得 $OQ=\frac{2\times2\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times2}=1$，取 NE 的中点为点 P，则 $\angle OPQ$ 即为异面直线 GN 与 ME 所成夹角的平面角或其补角，而 $OP=PQ=1$，$\therefore\triangle OPQ$ 为等边三角形，$\therefore$ 异面直线 GN 与 ME 的夹角大小为 60°，选项 A 正确；

$V_{MNEFGH}=2V_{E-MNFH}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times1\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，选项 B 错误；



在 $\triangle NFH$ 中，$\angle NFH=45^\circ$，$NH=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，$\therefore\triangle NFH$ 的外接圆直径 $D_1=\frac{\sqrt{10}}{\sin45^\circ}=2\sqrt{5}$，$\triangle HEF$ 的外接圆直径 $D_2=\frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=3\sqrt{2}$，$\therefore$ 四棱锥 $E-MNFH$ 的外接球直径 D 满足 $D^2=D_1^2+D_2^2-HF^2=20+18-16=22$，

$\therefore$ 四棱锥 $E-MNFH$ 的外接球的表面积为 $\pi D^2=22\pi$，选项 C 正确；

$\because ON\perp$ 平面 MEG，点 P 所在平面与平面 MEG 平行，$\therefore$ 点 P 的轨迹为五边形 $QPRST$，长度为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2+2\sqrt{2}$，D 选项错误．故选 AC．

13.【答案】$\pm\frac{1}{2}$

【解析】$(ax-1)^7$ 二项展开式的通项为 $T_{r+1}=(-1)^rC_7^ra^{7-r}x^{7-r}$，令 $r=3$，则 $T_4=-C_7^3a^4x^4=-\frac{35}{16}x^4$，解得 $a=\pm\frac{1}{2}$．

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

14.【答案】$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$

【解析】设 $|PO|=d$，$\angle APO=\alpha$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos 2\alpha=(d^2-4)\left(1-2\dfrac{4}{d^2}\right)=6$，整理得 $d^4-18d^2+32=0$，解得 $d^2=2$（舍去）或 $d^2=16$，则 $d=4$，满足条件的 P 点轨迹为 $x^2+y^2=16$，$\dfrac{8}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 4$，解得 $k^2\geqslant 3$，所以 $k\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$.

15.【答案】$\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$

【解析】设函数 $h(x)=e^x f(x)$，则 $h'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]>0$，$h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $e^{2x}f(2x+1)>e^{2-x}f(3-x)$，$e^{2x+1}f(2x+1)>e^{3-x}f(3-x)$，$h(2x+1)>h(3-x)$，$2x+1>3-x$，解得 $x>\dfrac{2}{3}$.

16.【答案】$(5,0)$，$(13,0)$

【解析】设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0\neq\pm3$ 且 $\dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，而 $\dfrac{y_M-0}{9-(-3)}=\dfrac{y_0-0}{x_0-(-3)}$，$\dfrac{y_N-0}{9-3}=\dfrac{y_0-0}{x_0-3}$，即 $y_M=\dfrac{12y_0}{x_0+3}$，$y_N=\dfrac{6y_0}{x_0-3}$，$\therefore M\left(9,\dfrac{12y_0}{x_0+3}\right)$，$N\left(9,\dfrac{6y_0}{x_0-3}\right)$. $\therefore y_M\cdot y_N=\dfrac{12y_0}{x_0+3}\cdot\dfrac{6y_0}{x_0-3}=\dfrac{72y_0^2}{-\dfrac{9}{2}y_0^2}=-16$（定值），而 y_M+y_N 不为定值. 设 $T(x_T,y_T)$，则 $\overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{TN}=(9-x_T)^2+(y_M-y_T)(y_N-y_T)=0$，$\therefore(9-x_T)^2+y_T^2-(y_M+y_N)y_T=16$，$\therefore$ 取 $y_T=0$，此时 $x_T=5$ 或 13，故以线段 MN 为直径的圆过定点 $(5,0)$，$(13,0)$.

17.【答案】(1)列联表见解析　(2)年龄与理解情况无关，此推断犯错误的概率不大于 0.010

【解析】(1)完成 2×2 列联表如下：

年龄	理解情况		总计
	会取代	不会取代	
30 岁以下	18	12	30
30 岁及以上	24	6	30
总计	42	18	60

………………………………………………………………………………… 5 分

(2)零假设为 H_0：年龄与理解情况相互独立，即年龄与理解情况无关，

由题意，$\chi^2=\dfrac{60\times(24\times12-18\times6)^2}{42\times18\times30\times30}\approx2.857<6.635=x_{0.010}$. ……………………………… 9 分

所以根据小概率值 $\alpha=0.010$ 的独立性检验，我们推断 H_0 成立.

即认为年龄与理解情况无关，此推断犯错误的概率不大于 0.010. ……………………………… 10 分

18.【答案】(1)$B=\dfrac{\pi}{6}$　(2)$\sqrt{14}$

【解析】(1)$\because\sin C=\sin 2B$，$\therefore\sin C=2\sin B\cdot\cos B$，

由正弦定理得 $c=2b\cos B$， ……………………………………………………… 2 分

由 $b^2(\sin^2B-3\cos^2B)=-a(a+b)$，得 $b^2(1-4\cos^2B)=-a^2-ab$，

又由 $c=2b\cos B$，得 $c^2=4b^2\cos^2B$，$b^2\left(1-\dfrac{c^2}{b^2}\right)=-a^2-ab$，$a^2+b^2-c^2=-ab$， ……………………… 4 分

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，又 $\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$，

由 $\sin C=\sin 2B$，$\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sin 2B$，$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，得 $2B\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore 2B=\dfrac{\pi}{3}$，$B=\dfrac{\pi}{6}$， ……………………… 6 分

(2)由(1)得 $B=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{6}$，$C=\frac{2\pi}{3}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=2\sqrt{3}$，$a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{6}$，………………………………………………………… 9 分

设 AC 的中点为 D，则 $AD=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，

在$\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cdot\cos A}=\sqrt{2+24-2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=$ ………… 11 分

$\sqrt{14}$，…………………………………………………………………… 12 分

所以 AC 边上的中线长为 $\sqrt{14}$.

19.【答案】(1)略　(2)$a_n=2^{n-1}+(-3)^{n-1}$；$S_n=2^n-\frac{3}{4}-\frac{(-3)^n}{4}$

【解析】(1)证明：$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$ 可化为 $a_{n+2}+3a_{n+1}=2(a_{n+1}+3a_n)$，$\frac{a_{n+2}+3a_{n+1}}{a_{n+1}+3a_n}=2(n\in\mathbf{N}^*)$，……………………………………………… 3 分

$\therefore\{a_{n+1}+3a_n\}$是以 $a_2+3a_1=5$ 为首项，2 为公比的等比数列；………………………… 5 分

(2)由(1)可知 $a_{n+1}+3a_n=5\cdot2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，………………………………………… 7 分

$a_{n+1}-2^n=-3(a_n-2^{n-1})$，$\frac{a_{n+1}-2^n}{a_n-2^{n-1}}=-3$，$\{a_n-2^{n-1}\}$是 1 为首项，公比为 -3 的等比数列，………… 9 分

$\therefore a_n-2^{n-1}=1\times(-3)^{n-1}$，$a_n=2^{n-1}+(-3)^{n-1}$，$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}=2^n-\frac{3}{4}-\frac{(-3)^n}{4}$，

故 $a_n=2^{n-1}+(-3)^{n-1}$，$S_n=2^n-\frac{3}{4}-\frac{(-3)^n}{4}$. ………………………………………… 12 分

20.【答案】(1)略　(2)$\frac{9}{13}$

【解析】(1)证明：连接 AC，因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AC\perp BD$，$AB\perp AD$，

又平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$平面 $ABCD=AD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，所以 $AB\perp$平面 $ADEF$，………………………………………………………………………… 2 分

又 $AF\subset$平面 $ADEF$，所以 $AB\perp AF$. ……………………………………………… 3 分

因为 $ED\perp BD$，$AF\parallel DE$，所以 $AF\perp BD$，

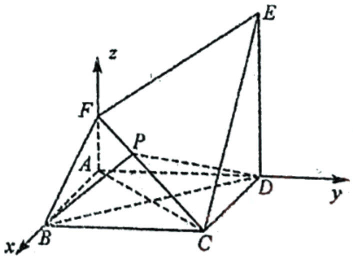
又 $AB\cap BD=B$，AB，$BD\subset$平面 $ABCD$，

所以 $AF\perp$平面 $ABCD$，……………………………… 4 分

又 $BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $AF\perp BD$，………………………… 5 分

又 $AC\perp BD$，$AF\cap AC=A$，AF，$AC\subset$平面 AFC，

所以 $BD\perp$平面 AFC，又 $FC\subset$平面 AFC，所以 $BD\perp FC$；……… 6 分



(2)解：以 A 为坐标原点，AB，AD，AF 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.

则 $F(0,0,1)$，$C(3,3,0)$，$B(3,0,0)$，$D(0,3,0)$，$E(0,3,3)$，

所以$\overrightarrow{CE}=(-3,0,3)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,3,0)$. 设$\overrightarrow{FP}=\lambda\overrightarrow{FC}(0<\lambda<1)$，

则$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{BF}+\lambda\overrightarrow{FC}=(-3+3\lambda,3\lambda,1-\lambda)$.

设平面 PBD 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3x+3y=0,\\ (-3+3\lambda)x+3\lambda y+(1-\lambda)z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，解得 $y=1$，$z=\dfrac{3-6\lambda}{1-\lambda}$，所以平面 PBD 的一个法向量为 $n=\left(1,1,\dfrac{3-6\lambda}{1-\lambda}\right)$.

又直线 EC 与平面 PBD 所成角的大小为 45°，

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{CE},n\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{CE}\cdot n|}{|\overrightarrow{CE}||n|}=\dfrac{\left|-3+3\times\dfrac{3-6\lambda}{1-\lambda}\right|}{\sqrt{9+9}\times\sqrt{1+1+\left(\dfrac{3-6\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ………… 9 分

解得 $\lambda=\dfrac{7}{13}$，所以 $\overrightarrow{FP}=\dfrac{7}{13}\overrightarrow{FC}$，所以 $PC=\dfrac{6}{13}CF$， ………… 10 分

所以 $V_{C\text{-}PBD}=V_{P\text{-}BCD}=\dfrac{6}{13}V_{F\text{-}BCD}=\dfrac{6}{13}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times3\times1=\dfrac{9}{13}$. ………… 12 分

21.【答案】(1) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　(2) ±2

【解析】(1) 依题意，设 $F(c,0)$，当 $x=c$ 时，$\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1$. ∴ $\dfrac{a^2+3}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1$，解得 $y^2=\dfrac{9}{a^2}$，∴ $y=\pm\dfrac{3}{a}$. … 2 分

∵ $|AB|=6$，∴ $\dfrac{6}{a}=6$，$a=1$.

∴ 双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$； ………… 4 分

(2) 易知 $c=2$，设直线 l：$x=ty+2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，

联立 $\begin{cases}x=ty+2,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3t^2-1)y^2+12ty+9=0$，∴ $y_A+y_B=-\dfrac{12t}{3t^2-1}$，$y_Ay_B=\dfrac{9}{3t^2-1}$， ………… 6 分

∴ $|AB|=\sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=\dfrac{6(t^2+1)}{1-3t^2}$. ①

联立 $\begin{cases}x=ty+2,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=0,\end{cases}$ 得 $(3t^2-1)y^2+12ty+12=0$，∴ $y_M+y_N=-\dfrac{12t}{3t^2-1}$，$y_My_N=\dfrac{12}{3t^2-1}$. ………… 8 分

∴ $|MN|=\sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{(y_M+y_N)^2-4y_My_N}=\dfrac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{t^2+1}}{1-3t^2}$. ② ………… 9 分

取 AB 中点 P，由 $y_A+y_B=y_M+y_N$ 可知点 P 也为 MN 中点.

∴ $|AM|\cdot|AN|=(|PM|-|PA|)\cdot(|PN|+|PA|)=|PM|^2-|PA|^2=\dfrac{1}{4}(|MN|^2-|AB|^2)$.

由 $|AB|^2=60|AM|\cdot|AN|$，得 $\dfrac{AB^2}{MN^2}=\dfrac{15}{16}$，把①②代入得 $t^2=\dfrac{1}{4}$，∴ $t=\pm\dfrac{1}{2}$.

∴ 直线 l 的斜率为 ±2. ………… 12 分

22.【答案】(1)详解见解析　(2)$\frac{1}{e}$ …………………… 2分

【解析】(1)∵$f(x)=\ln x-\frac{a}{x+1}$，∴$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+(a+2)x+1}{(x+1)^2x}$，$x>0$.

令 $g(x)=x^2+(a+2)x+1$，则 $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2x}$.

①当 $\Delta=a^2+4a\leqslant0$，即 $-4\leqslant a\leqslant0$ 时，$g(x)\geqslant0$ 恒成立，则 $f'(x)\geqslant0$，∴$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；…………………… 3分

②当 $\Delta=a^2+4a>0$，即 $a<-4$ 或 $a>0$ 时，……………………

(i)当 $a<-4$ 时，$g(x)=x^2+(a+2)x+1$ 是开口向上且过$(0,1)$的抛物线，对称轴方程为 $x=-\frac{a+2}{2}>0$，则

函数 $g(x)$有两个零点：$x_1=\frac{-(a+2)-\sqrt{a^2+4a}}{2}$，$x_2=\frac{-(a+2)+\sqrt{a^2+4a}}{2}$(显然 $x_1<x_2$)，列表如下：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

(ii)当 $a>0$ 时，$g(x)=x^2+(a+2)x+1$ 是开口向上且过$(0,1)$的抛物线，对称轴方程为 $x=-\frac{a+2}{2}<0$，则

$g(x)>0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，从而 $f'(x)>0$，∴$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. …………………… 5分

综上所述，当 $a\geqslant-4$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a<-4$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-(a+2)-\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{-(a+2)-\sqrt{a^2+4a}}{2},\frac{-(a+2)+\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{-(a+2)+\sqrt{a^2+4a}}{2},+\infty\right)$上单调递增； …………………… 6分

(2)由(1)可知，当 $a<-4$ 时，$f(x)$有两个极值点 x_1，x_2，则 x_1，x_2 是方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 的两根，

∴$x_1+x_2=-(a+2)$，$x_1\cdot x_2=1$， …………………… 7分

∴$f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1-\frac{a}{x_1+1}+\ln x_2-\frac{a}{x_2+1}=\ln x_1x_2-\frac{a(x_1+x_2+2)}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=-a$.

∴$k\cdot e^{f(x_1)+f(x_2)-4}+\ln\frac{k}{x_1+x_2-2}\geqslant0$ 恒成立转化为 $k\cdot e^{-a-4}+\ln\frac{k}{-a-4}\geqslant0$ 恒成立. …………………… 8分

令 $x=-a-4>0$，不等式转化为 $ke^x+\ln\frac{k}{x}\geqslant0$，

∴$ke^x+\ln k-\ln x\geqslant0$，$ke^x+\ln k+x\geqslant x+\ln x$，即 $ke^x+\ln(ke^x)\geqslant x+\ln x$. …………………… 9分

令 $h(x)=x+\ln x(x>0)$，则不等式化为 $h(ke^x)\geqslant h(x)$.

∵$h'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$，当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，∴$ke^x\geqslant x$，即 $k\geqslant\frac{x}{e^x}$. ……………………

…………………… 11分

令 $m(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $m'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，易得 $m(x)_{max}=m(1)=\frac{1}{e}$，

∴$x=-a-4=1$，即 $a=-5$ 时，实数 k 取得最小值为$\frac{1}{e}$. …………………… 12分

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。