

湖北省高中名校联盟 2024 届高三第一次联合测评

数 学

命题单位:襄阳四中数学学科组

审题单位:圆创教育研究中心 襄阳市第五中学

本试卷共4页,22题。满分150分。考试用时120分钟。

考试时间:2023年8月16日下午15:00—17:00

★祝考试顺利★

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $M = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $N = \{x | y = \sqrt{x+2} + \sqrt{1-x}\}$, 则 $M \cup N = (\quad)$
 A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-2, 1]$ D. $[-1, 2]$
- 已知复数 z 满足 $(1-i)z = 1+i$, 则 $z = (\quad)$
 A. $-i$ B. i C. $1-i$ D. $1+i$
- 从长度为 2, 4, 6, 8, 10 的 5 条线段中任取 3 条, 则这 3 条线段能构成一个三角形的概率是 (\quad)
 A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{3}$
- 设命题 p : 若数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, 则点 $P(n, a_n)$ 必在一次函数图象上; 命题 q : 若正项数列 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, 则点 $Q(n, a_n)$ 必在指数函数图象上. 下列说法正确的是 (\quad)
 A. p, q 均为真命题 B. p, q 均为假命题
 C. p 真 q 假 D. p 假 q 真
- 某人从 A 地到 B 地, 乘火车、轮船、飞机的概率分别为 0.3, 0.3, 0.4, 乘火车迟到的概率为 0.2, 乘轮船迟到的概率为 0.3, 乘飞机迟到的概率为 0.4, 则这个人从 A 地到 B 地迟到的概率是 (\quad)
 A. 0.16 B. 0.31 C. 0.4 D. 0.32
- 已知把物体放在空气中冷却时, 若物体原来的温度是 θ_1 °C, 空气的温度是 θ_0 °C, 则 t min 后物体的温度 θ °C 满足公式 $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$ (其中 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数). 某天小明同学将温度是 80 °C 的牛奶放在 20 °C 空气中, 冷却 2 min 后牛奶的温度是 50 °C, 则下列说法正确的是 (\quad)
 A. $k = \ln 2$ B. $k = 2 \ln 2$
 C. 牛奶的温度降至 35 °C 还需 4 min D. 牛奶的温度降至 35 °C 还需 2 min

数学试卷 第 1 页 (共 4 页)

7. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, M, N 是椭圆 C 上两点, 且

$$\overrightarrow{MF_1} = 2\overrightarrow{F_1N}, \overrightarrow{MF_2} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \text{ 则椭圆 } C \text{ 的离心率为()}$$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

8. 记 $a = \sqrt[2023]{2022}, b = \sqrt[2023]{2023}, c = \sqrt[2024]{2023}$, 则 a, b, c 的大小关系是()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 4)$ 均为正数, 且 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, 若由 $y_k = 2x_k - 1 (k = 1, 2, \dots, n)$ 生成一组新的数据 y_1, y_2, \dots, y_n , 则这组新数据与原数据的()可能相等.

- A. 极差 B. 平均数
C. 中位数 D. 标准差

10. 已知 O 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的顶点, 直线 l 交抛物线于 M, N 两点, 过点 M, N 分别向准线 $x = -\frac{p}{2}$ 作垂线, 垂足分别为 P, Q , 则下列说法正确的是()

- A. 若直线 l 过焦点 F , 则 N, O, P 三点不共线
B. 若直线 l 过焦点 F , 则 $PF \perp QF$
C. 若直线 l 过焦点 F , 则抛物线 C 在 M, N 处的两条切线的交点在某定直线上
D. 若 $OM \perp ON$, 则直线 l 恒过点 $(2p, 0)$

11. 已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 2, 下列说法正确的是()

- A. 正四面体 $P-ABC$ 的外接球表面积为 6π
B. 正四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离之和为定值
C. 正四面体 $P-ABC$ 的相邻两个面所成二面角的正弦值为 $\frac{1}{3}$
D. 正四面体 $Q-MNG$ 在正四面体 $P-ABC$ 的内部, 且可以任意转动, 则正四面体 $Q-MNG$ 的体积最大值为 $\frac{2\sqrt{2}}{81}$

12. 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 其图象关于直线 $x = 1$ 对称, 且对任意 $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$, 都有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2), \text{ 则下列说法正确的是()}$$

- A. $f(1)$ 一定为正数
B. 2 是 $f(x)$ 的一个周期
C. 若 $f(1) = 1$, 则 $f(\frac{2023}{4}) = 1$
D. 若 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上单调递增, 则 $f(1) \neq \frac{1}{2024}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $(x-2y)^5(x+y)$ 的展开式中 x^3y^3 的系数是_____.

14. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边分别为 3,4,以斜边所在直线为轴,其余各边旋转一周形成的曲面围成的几何体体积是_____.

15. 小王准备在单位附近的某小区买房,若小王看中的高层住宅总共有 n 层($20 \leq n \leq 30, n \in \mathbb{N}^*$),设第 1 层的“环境满意度”为 1,且第 k 层($2 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}^*$)比第 $k-1$ 层的“环境满意度”多出 $3k^2-3k+1$;又已知小王有“恐高症”,设第 1 层的“高层恐惧度”为 1,且第 k 层($2 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}^*$)比第 $k-1$ 层的“高层恐惧度”高出 $\frac{1}{3}$ 倍.在上述条件下,若第 k 层“环境满意度”与“高层恐惧度”分别为 a_k, b_k ,记小王对第 k 层“购买满意度”为 c_k ,且 $c_k = \frac{a_k}{b_k}$,则小王最想买第_____层住宅.

(参考公式及数据: $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 3 \approx 1.0986$, $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \approx 1.1006$)

16. 已知 $\odot O_1: x^2+(y-2)^2=1, \odot O_2: (x-3)^2+(y-6)^2=9$,过 x 轴上一点 P 分别作两圆的切线,切点分别是 M, N ,当 $|PM|+|PN|$ 取到最小值时,点 P 坐标为_____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{m \cdot 4^x + 1}{2^x}$ ($m \in \mathbb{R}$).

(I) 若函数 $f(x)$ 是偶函数,求实数 m 的值;

(II) 若 $\exists x_0 \in [0, 1]$,使得 $f(x_0) = x_0$ 成立,求实数 m 的取值范围.

18. (12 分)

西梅以“梅”为名,实际上不是梅子,而是李子,中文正规名叫“欧洲李”,素有“奇迹水果”的美誉.因此,每批西梅进入市场之前,会对其进行检测,现随机抽取了 10 箱西梅,其中有 4 箱测定为一等品.

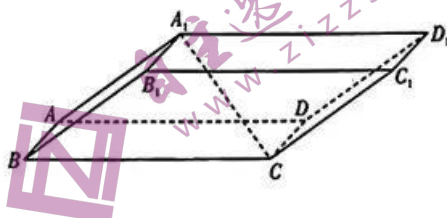
(I) 现从这 10 箱中任取 3 箱,求恰好有 1 箱是一等品的概率;

(II) 以这 10 箱的检测结果来估计这一批西梅的情况,若从这一批西梅中随机抽取 3 箱,记 ξ 表示抽到一等品的箱数,求 ξ 的分布列和期望.

19. (12分)

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 和侧面 ABB_1A_1 均为矩形, $AB=2,BC=6, BB_1=2\sqrt{3},A_1C=4$.

- (I) 求证: $A_1D \perp DC$;
(II) 求 AC_1 与平面 BAA_1B_1 所成角的正弦值.



20. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0, a_{n+1} = \begin{cases} \log_2 a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ 2^{a_n+2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

(I) 判断数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是否是等比数列? 若是, 给出证明; 否则, 请说明理由;

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 361, 记 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_{2n+1}) \cdot a_{2n+2}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

求证: $T_n < \frac{7}{16}$.

21. (12分)

已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 与直线 $l: y = kx + m (k \neq \pm \frac{3}{2})$ 有唯一的公共点 M .

(I) 若点 $N(2, 9)$ 在直线 l 上, 求直线 l 的方程;

(II) 过点 M 且与直线 l 垂直的直线分别交 x 轴于 $A(x_1, 0)$, y 轴于 $B(0, y_1)$ 两点. 是否存在定点 G, H , 使得 M 在双曲线上运动时, 动点 $P(x_1, y_1)$ 使得 $||PG| - |PH||$ 为定值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若两个不相等的正实数 a, b 满足 $f(a) = f(b)$, 求证: $a + b < 1$;

(III) 若 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 求证: $f(\cos \alpha) < f(\sin \alpha)$.

湖北省高中名校联盟 2024 届高三第一次联合测评 数学试卷参考答案与评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	C	B	D	C	D	BC	BCD	ABD	BCD

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. A 【解析】由 $M = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\} = [-1, 2]$, $N = \{x | y = \sqrt{x+2} + \sqrt{1-x}\} = [-2, 1]$, 得 $M \cup N = [-2, 2]$. 故选 A.

2. B 【解析】 $z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$, 故选 B.

3. A 【解析】从 5 条线段中任取 3 条, 可能的情况有: $(2, 4, 6)$, $(2, 4, 8)$, $(2, 4, 10)$, $(2, 6, 8)$, $(2, 6, 10)$, $(2, 8, 10)$, $(4, 6, 8)$, $(4, 6, 10)$, $(4, 8, 10)$, $(6, 8, 10)$ 共有 10 种可能, 其中, 能构成三角形的只有 $(4, 6, 8)$, $(4, 8, 10)$, $(6, 8, 10)$ 共 3 种可能, 所以, 能构成三角形的概率为 $\frac{3}{10}$. 选 A.

4. C 【解析】若数列 $\{a_n\}$ 是公差 $d \neq 0$ 的等差数列, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$, 故点 $P(n, a_n)$ 必在一次函数 $y = dx + (a_1 - d)$ 图像上. 故 p 真; 若 $a_n = 2^{n-1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, $\therefore a_n = 2^{n-1} \neq a^n$, $(\forall n \in \mathbb{N}^+)$. $\therefore Q(n, a_n)$ 不在指数函数图像上. 故 q 假. 故 C 正确.

5. B 【解析】设事件 A 表示“乘火车”, 事件 B 表示“乘轮船”, 事件 C 表示“乘飞机”, 事件 D 表示“遇到”, 则 $P(A) = 0.3$, $P(D|A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(D|B) = 0.3$, $P(C) = 0.4$, $P(D|C) = 0.4$, $D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$, 由全概率公式得: $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = 0.3 \times 0.2 + 0.3 \times 0.3 + 0.4 \times 0.4 = 0.31$. 选 B.

6. D 【解析】由条件及公式 $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$, 得 $50 = 20 + (80 - 20)e^{-k}$, 故 $k = \frac{1}{2} \ln 2$, AB 错误; 又由 $35 = 20 + (80 - 20)e^{-kt}$, $k = \frac{1}{2} \ln 2$, 得 $t = 4$, 故牛奶的温度从 80°C 降至 35°C 需 4 min, 从 50°C 降至 35°C 还需 $4 - 2 = 2$ min. 故选 D.

7. C 【解析】连接 NF_2 , 设 $|NF_1| = n$, 则 $|MF_1| = 2n$, $|MF_2| = 2a - 2n$, $|NF_2| = 2a - n$

在 $\text{Rt}\triangle MNF_2$ 中

$$(3n)^2 + (2a - 2n)^2 = (2a - n)^2$$

$$\therefore 9n^2 + 4a^2 - 8an + 4n^2 = 4a^2 - 4an + n^2$$

$$\therefore 12n^2 = 4an$$

$$n = \frac{a}{3}$$

$$\therefore |MF_1| = \frac{2a}{3} \quad |MF_2| = \frac{4a}{3}$$

在 $\text{Rt}\triangle MF_1F_2$ 中

$$4c^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{16a^2}{9}, \therefore 36c^2 = 20a^2$$

$$e^2 = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}, \text{又} \because e \in (0, 1)$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{故选 C.}$$

8. D 【解析】设 $f(x) = x^{\frac{1}{2023}}$, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 故 $f(2022) < f(2023)$, 即 $a < b$; 设 $g(x) =$

$$\frac{\ln x}{x+1}, x > e^2, \text{则 } g'(x) = \frac{\frac{1+x}{x} - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{1+\frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} < \frac{2 - \ln x}{(x+1)^2} < 0 (x > e^2),$$

$g(x)$ 在 $(e^2, +\infty)$ 单调递减, 故 $g(2023) < g(2022)$, 即 $c < a$; 综上得, $b > a > c$. 故 D 正确.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. BC 【解析】极差分别为 $x_n - x_1$ 和 $y_n - y_1 = 2(x_n - x_1)$, $\because x_n - x_1 > 0$, $\therefore y_n - y_1 = 2(x_n - x_1) > x_n - x_1$, 故 A 错误; 由 $y = 2x - 1 = x$ 知, 当 $x = 1$ 时, 平均数相等, 故 B 正确; 当 $n = 2m - 1$ 时, 中位数

分别为 x_m 与 $y_m = 2x_m - 1$, 同理可知当 $x_m = 1$ 时, 中位数相等, 当 $n = 2m$ 时, 中位数分别为 $\frac{x_m + x_{m+1}}{2}$

与 $\frac{y_m + y_{m+1}}{2} = \frac{(2x_m - 1) + (2x_{m+1} - 1)}{2} = 2 \times \frac{x_m + x_{m+1}}{2} - 1$, 同理可知当 $\frac{x_m + x_{m+1}}{2} = 1$ 时, 中位数相

等, 故 C 正确; 由 $s_y = 2s_x, s_x > 0$ 知, $s_y - 2s_x > s_x$, 标准差不可能相等, 故 D 错误. 综上, 选 BC.

10. BCD 【解析】设直线 $l: x - ty = m$

$$\text{联立方程} \begin{cases} x = ty + m \\ y^2 = 2px \end{cases}, \text{得 } y^2 - 2pty - 2pm = 0$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

$$\text{则} \begin{cases} y_1 + y_2 = 2pt \\ y_1 y_2 = -2pm \end{cases}$$

选项 A 若直线 l 过焦点 F , 则 $m = \frac{p}{2}$

$$\therefore y_1 y_2 = -p^2$$

$$P\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$$

$$\therefore k_{OP} = \frac{y_1}{-\frac{p}{2}} = \frac{2p}{y_2}$$

$$\text{又} \because N\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right), \therefore k_{ON} = \frac{y_2}{\frac{y_2^2}{2p}} = \frac{2p}{y_2} = k_{OP}$$

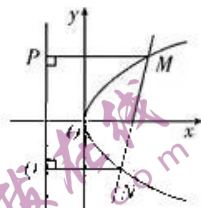
$\therefore N, O, P$ 三点共线, \therefore A 错

选项 B 由抛物线的定义和平行线的性质知:

$$\angle MFP = \angle MPF = \angle PFO = \angle 1$$

$$\angle NFQ = \angle NQF = \angle QFO = \angle 2$$

$$\text{又 } 2(\angle 1 + \angle 2) = \pi, \therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{\pi}{2}$$



所以 B 对;

选项 C 抛物线 C 在点 M 处的切线为 $y_1 y = p(x + x_1)$

抛物线 C 在点 N 处的切线为 $y_2 y = p(x + x_2)$, 联立得 $\begin{cases} y_1 y = p(x + x_1) \\ y_2 y = p(x + x_2) \end{cases}$

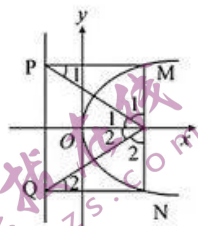
解得: $x = \frac{y_1 y_2}{2p} = -\frac{p}{2}$

抛物线在点 M, N 处的切线的交点在定直线 $x = -\frac{p}{2}$ 上, 所以 C 对

选项 D 因为 $OM \perp ON$, $\therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$, $\therefore \frac{y_1^2 y_2^2}{2p^2} + y_1 y_2 = 0$

将韦达定理代入得: $m = 2p$

所以直线 l 恒过点 $(2p, 0)$, 所以 D 对



11. ABD 【解析】A. 棱长为 2 的正四面体 $P-ABC$ 的外接球与棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体的外接球半径相同, 设为 R , 则 $2R = \sqrt{6}$, 所以 $S = 4\pi R^2 = 6\pi$, 所以 A 对

B. 设四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离分别为 d_1, d_2, d_3, d_4 , 设四面体 $P-ABC$ 的高为 d , 由等体积法可得: $\frac{1}{3}S(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) = \frac{1}{3}sd$, 所以 $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = d$ 为定值. 所以 B 对

C. 设 BC 中点为 D, 连接 PD, AD, 则 $\angle PDA$ 为求, $\cos \angle PDA = \frac{3+3-4}{6} = \frac{1}{3}$, 所以正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 C 错

D. 要使正四面体 $Q-MNG$ 在四面体 $P-ABC$ 的内部, 且可以任意转动, 则正四面体 $Q-MNG$ 的外接球在四面体 $P-ABC$ 内切球内部, 当正四面体 $Q-MNG$ 的外接球恰好为四面体 $P-ABC$ 内切球时, 正四面体 $Q-MNG$ 的体积最大值, 由于正四面体的外接球与内球球半径之比为 $\frac{1}{3}$, 所以正四面体

$Q-MNG$ 的外接球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$, 设正四面体 $Q-MNG$ 为 a , 则 $\sqrt{3}(\frac{\sqrt{2}}{2}a) = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{6}$, 所以 $a = \frac{2}{3}$, 故体

积 $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{2\sqrt{2}}{81}$, 所以 D 对

因此, 正确答案为 ABD

12. BCD 【解析】因为 $f(x) = 0$ 符合条件, 故 A. 错误; 因为偶函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 所

以 $f(x+2) = f(-x) = f(x)$, 故 B 正确; 因为对任意 $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$, 都有 $f(x_1 + x_2) =$

$f(x_1)f(x_2)$, 所以对任意 $x \in [0, 1]$, 取 $x_1 = x_2 = \frac{x}{2}$ 得 $f(x) = [f(\frac{x}{2})]^2 \geq 0$; 若 $f(1) = 1$, 即 $f(1) =$

$[f(\frac{1}{2})]^2 = [f(\frac{1}{4})]^4 = 1$, 故 $f(\frac{1}{4}) = 1$, 由 2 是 $f(x)$ 的周期得 $f(\frac{2023}{4}) = f(506 - \frac{1}{4}) = f(-\frac{1}{4}) =$

$f(\frac{1}{4}) = 1$, 故 C 正确; 假设 $f(1) = \frac{1}{2024}$, 由 $f(1) = [f(\frac{1}{2})]^2 = [f(\frac{1}{4})]^4 = \frac{1}{2024}$ 及 $f(x) \geq 0$,

$x \in [0, 1]$, 得 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2024}}, f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2024}}$, 故 $f(\frac{1}{4}) > f(\frac{1}{2})$, 这与 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上单调递增矛

盾, 故 D 正确.



三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. -40 【解析】 $(x-2y)^5(x+y) = x(x-2y)^5 + y(x-2y)^5$, 所以 x^3y^3 的系数为 $C_5^3(-2)^3 + C_5^2(-2)^2 = -40$

14. $\frac{48\pi}{5}$ 【解析】由勾股定理知斜边为5,斜边上的高为 $\frac{12}{5}$,该几何体为两个同底面的圆锥,底面半径为 $\frac{12}{5}$,两个圆锥的高之和为5,所以该几何体体积为 $\frac{48\pi}{5}$

15. 10

【解析】依题意, $a_1=1$,且 $a_k-a_{k-1}=3k^2-3k+1, (k \geq 2)$; $b_1=1, b_k=b_{k-1}+\frac{1}{3}b_{k-1}=\frac{4}{3}b_{k-1}$ 所以

$$\begin{aligned} a_k &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_k - a_{k-1}) \\ &= 1 + (3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1) + (3 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1) + \dots + (3k^2 - 3k + 1) \\ &= (3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1) + (3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1) + (3 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1) + \dots + (3k^2 - 3k + 1) \\ &= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) - 3(1 + 2 + 3 + \dots + k) + k \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{2} - \frac{3k(k+1)}{2} + k = k^3 \end{aligned}$$

$$b_k = \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$$

【注】利用 $a_k - a_{k-1} = 3k^2 - 3k + 1 = k^2 - (k-1)^2, (k \geq 2)$ 求解 a_k 更易.

$$b_k = \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}, \text{故小王对第 } k \text{ 层住宅的购买满意度 } c_k = \frac{k^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}}$$

【方法一】由 $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+1)^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^k} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}}{k^3} = \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3}{\frac{4}{3}} > 1$, 即 $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - 1\right)k < 1$, 解得 $k < 0.9404$, 所以 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_9 < c_{10}$, 同理有 $c_{10} > c_{11} > c_{12} > \dots$, 小王最想购买第10层住宅.

【方法二】设 $f(x) = \frac{x^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}}, (x \geq 1)$, 则 $f'(x) = \frac{x^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}} \left(3 - x \ln \frac{4}{3}\right)$, 故 $1 \leq x \leq \frac{3}{\ln \frac{4}{3}}$ 时 $f(x)$ 单调

递增; $x \geq \frac{3}{\ln \frac{4}{3}}$ 时 $f(x)$ 单调递减. 由于 $\frac{3}{\ln \frac{4}{3}} = \frac{3}{2 \ln 2 - \ln 3} \approx 10.4312, \frac{f(11)}{f(10)} = \frac{3 \times 11^3}{4 \times 10^3} < 1$, 故 $f(10)$ 最

大, 小王最想购买第10层住宅.

16. $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ 【解析】设 $P(t, 0)$

$$\text{则 } |PM| = \sqrt{t^2 - (t-2)^2} = \sqrt{t^2 - 3}$$

$$|PN| = \sqrt{(t-3)^2 - 6^2 + 9} = \sqrt{(t-3)^2 + 27}$$

$$|PM| + |PN| = \sqrt{t^2 - 3} + \sqrt{(t-3)^2 + 27}$$

取 $A(0, -\sqrt{3}), B(3, 3\sqrt{3})$

$$\text{则 } |PM| + |PN| = |PA| + |PB| \geq |AB| = \sqrt{3^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{57}$$

数学试卷参考答案与评分细则 第4页(共9页)

此时, AB 直线: $y + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}(x-0)$

令 $y=0$, 则 $x = \frac{3}{4}$

$\therefore P(\frac{3}{4}, 0)$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(I) 由函数 $f(x)$ 是偶函数知, $f(-x) = f(x)$ (1分)

故 $\log_2 \frac{m \cdot 4^{-x} + 1}{2^{-x}} = \log_2 \frac{m \cdot 4^x + 1}{2^x}$, 即 $\log_2 \frac{m + 4^x}{2^x} = \log_2 \frac{m \cdot 4^x + 1}{2^x}$,

化简得, $(m-1)(4^x-1) = 0$ 恒成立. (4分)

故 $m=1$, 实数 m 的值为 1. (5分)

(II) 若 $\exists x_0 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_0) = x_0$, 则 $\log_2 \frac{m \cdot 4^{x_0} + 1}{2^{x_0}} = x_0$, (6分)

即 $m \cdot 4^{x_0} + 1 = 4^{x_0}$, $x_0 \in [0, 1]$ 能成立.

于是, $m = 1 - (\frac{1}{4})^{x_0}$, $x_0 \in [0, 1]$ (8分)

由指数函数单调性, 得 $m = 1 - (\frac{1}{4})^{x_0} \in [0, \frac{3}{4}]$

故实数 m 的取值范围为 $[0, \frac{3}{4}]$ (10分)

【方法二】若 $\exists x_0 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_0) = x_0$, 则 $\log_2 \frac{m \cdot 4^{x_0} + 1}{2^{x_0}} = x_0$, (6分)

即 $m \cdot 4^{x_0} + 1 = 4^{x_0}$, $x_0 \in [0, 1]$ 能成立.

于是, $4^{x_0} = \frac{1}{1-m}$, $x_0 \in [0, 1]$,

由指数函数单调性, 得 $\frac{1}{1-m} = 4^{x_0} \in [1, 4]$ (8分)

解得 $0 \leq m \leq \frac{3}{4}$

故实数 m 的取值范围为 $[0, \frac{3}{4}]$ (10分)

..... (10分)

18. 【解析】(1) 设抽取的 3 箱西梅恰有 1 箱是一等品为事件 A_1 ,

则 $P(A_1) = \frac{C_1^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$;

因此, 从这 10 箱中任取 3 箱, 恰好有 1 箱是一等品的概率为 $\frac{1}{2}$, (4分)

(2) 由题意可知, 从这 10 箱中随机抽取 1 箱恰好是一等品的概率 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$,

由题可知 ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 则 $\xi \sim B(3, \frac{2}{5})$

$$P(\xi=0) = C_3^0 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}, P(\xi=1) = C_3^1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}, P(\xi=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{36}{125},$$

$$P(\xi=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{8}{125},$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3 (10分)
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$	

$$E(\xi) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}. \dots\dots\dots (12分)$$

19. (I) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 和四边形 ABA_1B_1 均为矩形,

$$\therefore AB \perp AA_1, AB \perp AD$$

$$\text{又} \because AA_1 \cap AD = A$$

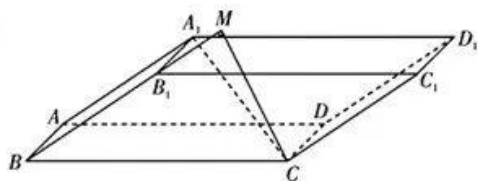
$$\therefore AB \perp \text{平面} AA_1D_1D$$

$$\because A_1D \subset \text{平面} AA_1D_1D$$

$$\therefore AB \perp A_1D$$

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore A_1D \perp DC \dots\dots\dots (4分)$$



(II) 设 $\angle A_1AD = \theta$

$$\because A_1D \perp DC$$

$$\therefore A_1C^2 = DC^2 + A_1D^2 = DC^2 + A_1A^2 + AD^2 - 2A_1A \cdot AD \cos\theta$$

$$\therefore 16 = 4 + 12 + 36 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 6 \cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\because \theta \in [0, \pi], \therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \dots\dots\dots (6分)$$

过 C 点作 CM 垂直交 BB_1 于点 M , 由(1)可知 $AB \perp \text{平面} BCC_1B_1, \therefore CM \subset \text{平面} BCC_1B_1,$

$$\therefore AB \perp CM$$

$$\because CM \perp BB_1, AB \cap BB_1 = B$$

$$\therefore CM \perp \text{平面} ABB_1A_1, \text{设} AC_1 \text{与平面} BAA_1B_1 \text{所成的角为} \alpha,$$

$$\text{又} \angle B_1BC = \angle A_1AD = \frac{\pi}{6}, \therefore CM = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\because CC_1 \parallel \text{平面} AA_1B_1B$$

$$\therefore C_1 \text{到平面} AA_1B_1B \text{的距离等于} 3 \dots\dots\dots (10分)$$

$$\text{在平行四边形} A_1ACC_1 \text{中}, (A_1C)^2 + (AC_1)^2 = 2[(A_1A)^2 + (AC)^2]$$

$$\therefore 16 + (AC_1)^2 = 2(40 + 12), \therefore AC_1 = 2\sqrt{22}$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{CM}{AC_1} = \frac{3}{2\sqrt{22}} = \frac{3\sqrt{22}}{44},$$

$$\therefore AC_1 \text{ 与平面 } BAA_1B_1 \text{ 所成角的正弦值 } \frac{3\sqrt{22}}{44}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

20. 【解析】(I) 数列 $\{a_{2n-1}\}$ 成等比数列. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

根据 $a_{n+1} = \begin{cases} \log_2 a_n, & \text{当 } n \text{ 为奇数时,} \\ 2^{a_n - 1}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时.} \end{cases}$ 得

$$a_{2n+1} = 2^{a_{2n} - 1} = 2^{\log_2 a_{2n-1} - 1} = 2^2 a_{2n-1} = 4a_{2n-1}; \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\because a_1 > 0, \therefore a_{2n-1} > 0, \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = 4, \text{ 即数列 } \{a_{2n-1}\} \text{ 成等比数列.} \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$(II) \text{ 由 (I) 得, } \therefore a_{2n-1} = a_1 \cdot 4^{n-1}, a_{2n} = \log_2 a_{2n-1} = \log_2 a_1 + 2(n-1), \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\text{故 } S_{10} = a_1(4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4) + 5\log_2 a_1 + 2(0+1+2+3+4) = 341a_1 + 5\log_2 a_1 + 20$$

$$\text{由 } S_{10} = 361, \text{ 得 } 341a_1 + 5\log_2 a_1 + 20 = 361. \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

显然, $f(x) = 341x + 5\log_2 x + 20, x > 0$ 单调递增, 且 $f(1) = 361 = f(a_1)$,

$$\text{故 } a_1 = 1, a_{n-1} = 4^{n-1} = 2^{2n}, a_{2n+2} = \log_2 a_{2n-1} + 2n = 2n. \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{\log_2 a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, T_1 = b_1 = \frac{1}{4} < \frac{7}{4}, T_2 = b_1 + b_2 = \frac{5}{16} < \frac{7}{16} \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } b_n = \frac{1}{4n} = \frac{1}{4(n-1)n} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n < \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{16}$$

综上, 知 $T_n < \frac{7}{16}$. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

21. 【解析】(1) 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 则 $(9-4k^2)x^2 - 8kmx - 4m^2 - 36 = 0$

又 \because 点 $N(2,9)$ 在直线 $l: y = kx + m$ 上, 所以: $9 = 2k + m$,

$$\because 9-4k^2 \neq 0 \text{ 时, } \therefore \Delta = 64k^2m^2 - 4(9-4k^2)(-4m^2-36) = 0, \text{ 则 } m^2 = 4k^2 - 9$$

$$\text{所以: } (9-2k)^2 = 4k^2 - 9, \text{ 即, 则 } k = \frac{5}{2}$$

$$\text{当 } k = \frac{5}{2} \text{ 时, } m = 4; \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{所以: 直线 } l \text{ 的方程: } y = \frac{5}{2}x + 4. \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(II) 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 则 $(9-4k^2)x^2 - 8kmx - 4m^2 - 36 = 0$, 因为 $k \neq \pm \frac{3}{2}$, M 是双曲线与直线的唯

一公共点, 所以 $\Delta = 64k^2m^2 - 4(9-4k^2)(-4m^2-36) = 0$, 化简得 $m^2 = 4k^2 - 9$, 解得点 M 的坐标为 $\left(\frac{4km}{9-4k^2}, \frac{9m}{9-4k^2} \right)$, 即为 $\left(\frac{4k}{-m}, \frac{9}{-m} \right)$. $\dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

于是,过点 M 且与 l 垂直的直线为 $y + \frac{9}{m} = -\frac{1}{k}(x + \frac{4k}{m})$, 可得

$$A(\frac{13k}{-m}, 0), B(0, -\frac{13}{m}), P(-\frac{13k}{m}, -\frac{13}{m}), \dots \dots \dots (9 \text{分})$$

即 $x_1 = -\frac{13k}{m}, y_1 = -\frac{13}{m}$, 于是

$$x_1^2 = \frac{169k^2}{m^2} = \frac{169}{m^2}(\frac{m^2+9}{4}) = \frac{169}{4}(1 + \frac{9}{m^2}) = \frac{169}{4}(1 + \frac{9}{(-\frac{13}{y_1})^2}) = \frac{169}{4} + \frac{9}{4}y_1^2 \dots \dots \dots (10 \text{分})$$

$$\text{即 } P \text{ 的轨迹方程为: } \frac{x^2}{\frac{169}{4}} - \frac{y^2}{9} = 1 (y \neq 0) \dots \dots \dots (11 \text{分})$$

所以存在定点 $G(-\frac{13\sqrt{13}}{6}, 0), H(\frac{13\sqrt{13}}{6}, 0)$, 使得当点 M 运动时, $||PG| - |PH||$ 为定值 13 ...
..... (12分)

22. 【解析】(I) 函数 $f(x) = x \ln x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ (1分)

由 $f'(x) = \ln x + 1 > 0$, 得 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减; (2分)

由 $f'(x) = \ln x + 1 < 0$, 得 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增,

综上所述, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{1}{e})$, 单调递增区间是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ (3分)

(II) 由 (I) 得 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 的值域为 $(\frac{1}{e}, 0)$, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上的值域为 $(-\frac{1}{e}, +\infty)$. 注意到

$f(1) = 0, f(a) = f(b)$. 不妨设 $0 < a < \frac{1}{e} < b < 1$, 则欲证 $a + b < 1$, 即证 $b < 1 - a$.

由于 $\frac{1}{e} < b < 1 - a$, 由 (I) 得 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 故只需证 $f(b) < f(1 - a)$, 由已知 $f(a) = f(b)$, 即证: $f(a) < f(1 - a)$, 也即 $f(a) - f(1 - a) < 0$ (4分)

【方法一】令 $F(x) = f(x) - f(1 - x), 0 < x < \frac{1}{e}$.

$$F'(x) = f'(x) + f'(1 - x) = \ln x + \ln(1 - x) + 2 = \ln[x(1 - x)] + 2, 0 < x < \frac{1}{e}$$

由 $[x(1 - x)] = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 单调递增, 得 $F'(x) = \ln[x(1 - x)] + 2$ 单调递增且

$$F'(x) = \ln[x(1 - x)] + 2 \in (-\infty, \ln(e - 1)).$$

由于 $\ln(e - 1) > 0$, 故 $\exists x_0 \in (0, \frac{1}{e})$ 满足 $F'(x_0) = 0$ (5分)

由 $F'(x)$ 单调递增知:

当 $x \in (0, x_0)$ 时 $F'(x) < F'(x_0) = 0, F(x)$ 单调递减, 值域为 $(F(x_0), 0)$; (6分)

当 $x \in (x_0, \frac{1}{e})$ 时 $F'(x) > F'(x_0) = 0, F(x)$ 单调递增, 值域为 $(F(x_0), -\frac{1}{e} - (1 - \frac{1}{e})\ln(1 - \frac{1}{e}))$;

..... (7分)

设 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1, 0 < x < 1$. 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} < 0, g(x)$ 单调递减, 故 $g(x) > g(1) = 0$,

即 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}, 0 < x < 1$. 取 $x = 1 - \frac{1}{e}$, 得 $\ln(1 - \frac{1}{e}) > 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{e}}$, 即 $-\frac{1}{e} - (1 - \frac{1}{e}) \ln(1 - \frac{1}{e}) < 0$

综上, 得 $F(x) < 0$, 即 $f(a) - f(1-a) = F(a) < 0, a+b < 1$ 得证. (8分)

【方法二】(重新同构)

$$f(a) < f(1-a) \Leftrightarrow a \ln a < (1-a) \ln(1-a) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{1-a} < \frac{\ln(1-a)}{a} = \frac{\ln(1-a)}{1-(1-a)} \dots (5分)$$

令 $F(x) = \frac{\ln x}{1-x}, 0 < x < 1$, 即证: $F(a) < F(1-a)$. 由于 $0 < a < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, 从而 $0 < a < 1-a < 1$.

故要证 $F(a) < F(1-a)$ 成立, 只需 $F(x) = \frac{\ln x}{1-x}$ 在 $(0, 1)$ 单调递增成立即可. (6分)

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1-x) + \ln x}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - 1}{(1-x)^2}, \text{ 令 } G(x) = \frac{1}{x} + \ln x - 1, 0 < x < 1, \text{ 则 } G'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} =$$

$$\frac{x-1}{x^2} < 0, G(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 单调递减}, G(x) > G(1) = 0, F'(x) = \frac{G(x)}{(1-x)^2} > 0, \text{ 故 } F(x) = \frac{\ln x}{1-x} \text{ 在 } (0, 1)$$

单调递增成立, 原命题成立. (8分)

【方法三】(比值代换) 由对称性, 不妨设 $0 < a < b, t = \frac{b}{a} > 1$,

$$\text{则 } f(a) = f(b) \Leftrightarrow a \ln a = ta \ln(ta) \Leftrightarrow \ln a = \frac{t \ln t}{1-t}$$

由于 $b = ta$, 欲证 $a+b < 1$, 即证: $(1+t)a < 1 \Leftrightarrow \ln(1+t) + \ln a < 0$, 即证: $\ln(1+t) + \frac{t \ln t}{1-t} < 0$.

【方法四】(切、割线放缩) 1、由于 $0 < a < \frac{1}{e}$, 故 $a(1 + \ln a) < 0$, 即 $a \ln a < -a$;

2、由方法二知 $\frac{1}{x} + \ln x - 1 > 0, 0 < x < 1$, 故 $\frac{1}{b} + \ln b - 1 > 0$, 即 $\ln b > 1 - \frac{1}{b}$, 故 $b \ln b > b - 1, \frac{1}{e} < b < 1$;

由 1, 2 知 $b - 1 < b \ln b = a \ln a < -a$, 故 $a + b < 1$ 成立, 原命题成立.

(III) 由 (II) 知 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab < (a+b)^2 < 1$ (9分)

(1) 当 $\frac{1}{e} \leq \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \alpha < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(\cos \alpha) < f(\sin \alpha)$ (10分)

(2) 当 $0 < \cos \alpha < \frac{1}{e} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \alpha < 1$ 时, 由 $a^2 + b^2 < 1$, 取 $0 < a = \cos \alpha < \frac{1}{e}$, 得

$$f(a) = f(b) \left(0 < a = \cos \alpha < \frac{1}{e} < b < 1 \right) \text{ 时, 有 } a^2 + b^2 < 1 \Leftrightarrow b^2 < 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha, \text{ 即 } \frac{1}{e} < b < \sin \alpha < 1.$$

由 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(\cos \alpha) = f(a) = f(b) < f(\sin \alpha)$,

综上, 得, 当 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(\cos \alpha) < f(\sin \alpha)$ 成立. (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线