绝密★启用前

学科网2022年高三2月大联考（山东、广东、湖南、湖北四省）

数　学

本卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{x|x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x||x|<1\}$，则 $A\cap B=$ C

A．$\{0,\frac{1}{2}\}$　　B．$\{0,\frac{1}{2},1\}$　　C．$\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\}$　　D．$\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\}$

2．设 $z=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（i为虚数单位），则 $|\bar{z}|=$ A

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．1　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_3\cdot a_6=-8$

3．已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，若 $a_3+a_6=2$，$a_4\cdot a_5=-8$，则 $a_9=$ C

A．1或8　　B．1或 -8　　C．1或 -8　　D．-1或8

4．普罗斯数是如下形式的数：$k\cdot 2^n+1$，其中 k 是奇数，n 是正整数，且 $2^n>k$．既是普罗斯数又是素数(素数又称质数)的整数，称为普罗斯素数．从集合 $A=\{x\in\mathbf{N}^*|1\le x\le 10\}$ 中任取两个数，恰有一个数是普罗斯素数的概率是 D

A．$\frac{8}{15}$　　B．$\frac{7}{15}$　　C．$\frac{19}{45}$　　D．$\frac{16}{45}$

5．记函数 $y=\log_2\frac{x}{2-x}$ 的定义域为集合 A，若"$x\in A$"是"关于 x 的不等式 $x^2+mx-2m^2<0$ $(m>0)$ 成立"的充分不必要条件，则实数 m 的取值范围是 B　2、1

A．$(2,+\infty)$　　B．$[2,+\infty)$　　C．$(0,2)$　　D．$(0,2]$

6．若对任意的角 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\sin\alpha-3\cos\alpha=\sqrt{10}\sin(\alpha+\theta)$，则 $\cos(2\theta+\frac{\pi}{4})=$ D

A．$\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　B．$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　D．$-\frac{\sqrt{2}}{10}$

7．若存在直线 $y=kx+b$ 在函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=g(x)$ 的图象之间，即对定义域内的任意 x，$f(x)>kx+b>g(x)$ 恒成立，则称直线 $y=kx+b$ 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的"分界线"，若 $f(x)=\mathrm{e}^{x+m}$ $(x>0)$ 与 $g(x)=x^{\frac{1}{2}}$ $(x>0)$ 存在"分界线"，其中e为自然对数的底数，则实数 m 的取值范围为 A

$e^{x-\frac{2}{e}}$

A．$(-\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$　　B．$(-\frac{2}{\mathrm{e}},+\infty)$　　C．$(-\mathrm{e},+\infty)$　　D．$(-\mathrm{e}^2,+\infty)$

8．已知在 $\triangle ABC$ 中，O 为其内部一点且满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，点 D 在 $\triangle AOB$ 内（不包括边

重心

界），且$\overrightarrow{CD}=m\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CB}$，则$\dfrac{1}{m+n}$的取值范围是

A. $(\frac{2}{3},1)$　　B. $(1,\frac{3}{2})$　　C. $(\frac{3}{2},2)$　　D. $(\frac{4}{3},3)$

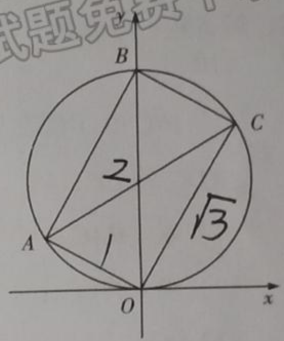
二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．为学习贯彻党的十九届六中全会精神，某单位组织"筑梦新时代"主题演讲活动.9位评委对某位选手的具体评分如下：7.8，8.4，8.5，8.6，8.8，8.9，9.5，9.7，9.9，则下列说法正确的是 AB

A．9位评委的评分的极差是2.1　　B．9位评委的评分的中位数是8.8

C．9位评委的评分的平均分是8.8　　D．9位评委的评分的方差是$\frac{31}{75}$

10．如图，O为坐标原点，B为y轴正半轴上一点，矩形$OABC$为圆M的内接四边形，OB为直径，$|OC|=\sqrt{3}|OA|=\sqrt{3}$，过直线$2x+y-4=0$上一点$P$作圆$M$的两条切线，切点分别为$E,F$，则下列结论正确的是 A



A．圆M的方程为$x^2+(y-1)^2=1$ (0,1)

B．直线AB的斜率为2

C．四边形$PEMF$的最小面积为2

D．$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值为$\frac{4}{5}$

11．若实数x，y满足$2^x+2^{y+1}=1$，$m=x+y$，$n=(\frac{1}{2})^x+(\frac{1}{2})^{y-1}$，则 A

A．$x<0$且$y<-1$　　B．m的最大值为-3　　C．n的最小值为7　　D．$n\cdot 2^m<2$

12．已知曲侧面三棱柱的定义：侧棱垂直于底面，底面是以正三角形的三个顶点为圆心，正三角形的边长为半径画圆弧得到的.如图1是曲侧面三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，图2是底面的平面图形，$AB=a$，N是$\overset{\frown}{BC}$的中点，且过点N的平面α // 平面A_1ABB_1，若曲侧面三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面积为πa^2，则以下结论正确的是

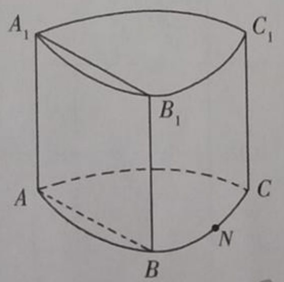


图1

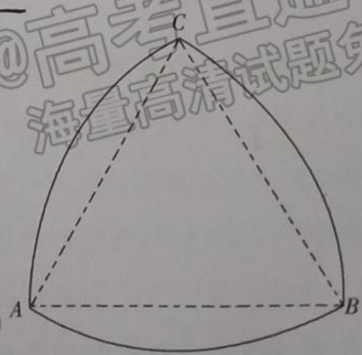


图2

A．曲侧面三棱柱的高为a

B．曲侧面三棱柱的上、下底面积均为$\frac{a^2}{2}(\pi-\sqrt{3})$

C．自点A绕侧面一圈到达点A_1，则点A到点A_1的最短距离为$\sqrt{10}a$

D．平面α截该曲侧面三棱柱所得图形的周长为$3a$

学科网 www.zxxk.com

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=2^{3x^2+ax+b}$ 是偶函数，且 $f(1)=16$，则 $2a+b=$________.

14. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $PA=4$，底面 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 3，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为________.

15. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $\omega>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$），若 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，且 $y=|f(x)|$ 的图象上相邻两对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{4}$，则函数 $f(x)$ 在 $[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}]$ 上的最大值为________.

16. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，点 F 关于 y 轴的对称点为 M，且 $2|AM|\cdot|BM|=3|AF|\cdot|BF|=24$，此时 $\triangle OAB$(O 为坐标原点)的面积为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

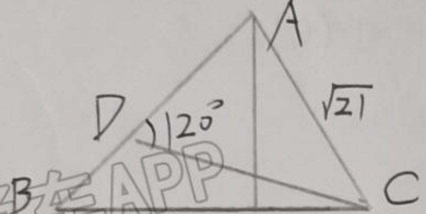
17. （10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，BC 边上的高为 $2\sqrt{3}$，点 D 为 AB 边上一点，且 $BD=kAD$，$AC=\sqrt{3}CD=\sqrt{21}$，$\angle ADC=120^\circ$.

$\sqrt{7}$

（1）求 $\angle BAC$；

（2）求 k 的值.



18. （12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_{n+1}-2n^2=(n+1)a_n+2n, n\in\mathbf{N}^*$，且 $a_1=1$.

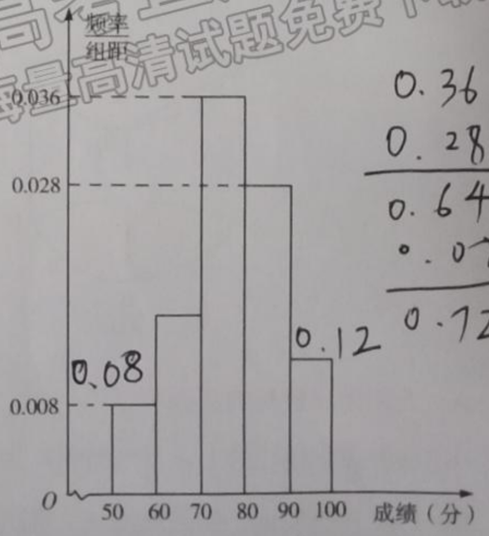
（1）求证：数列 $\{\dfrac{a_n}{n}\}$ 为等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{a_1},n=1\\ \dfrac{1}{a_n-n},n\geq 2\end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

28:12=7:3

19. （12 分）

燃情冬奥，筑梦同行，点亮盛世华光.为了助力 2022 年冬奥会、冬残奥会，某校组织全校学生参与奥运会项目知识竞赛，为了解本次竞赛中学生的成绩(成绩都在区间 [50,100] 内，单位：分)情况，现随机抽取了 m 名学生的成绩，并将这些成绩按照 [50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100] 分成 5 组，制成了如图所示的频率分布直方图.



0.36
0.28
0.64
0.08
0.72

已知 [50,60),[90,100],[60,70) 这三组的频率成等差数列，且成绩在 [60,70) 的学生有 16 人.

0.08 y x

@高考直通车APP 海量高清试题免费下载

（1）求m的值，并估计这m名学生本次竞赛成绩的中位数（结果精确到0.01）；

（2）定义：将成绩在$[90,100]$的学生定义为“冬奥达人”.从所抽样本中成绩在$[80,90),[90,100]$的学生中，按照组别进行分层抽样，共抽取10人，连同$n(n\in\mathbf{N}^*)$名教师志愿者一起组成志愿者小队，现在从这$(n+10)$人中随机抽取3人作为志愿者小队的队长，若队长是教师或“冬奥达人”的总人数ξ的期望不小于2，求n的最小值.

20.（12分） [80,90) 7 [90,100] 3

如图1，直角梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90^\circ$，E为AD边上的点，且$AD=2AE=2AB=2BC=2$.将$\triangle ABE$沿BE向上折起，使得异面直线AB与ED所成的角为60°，F为线段AD上一点，如图2.

AC=1

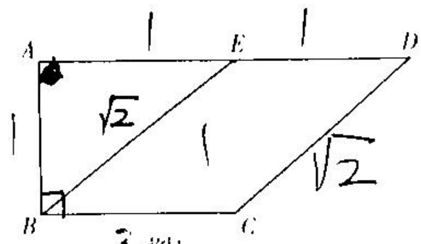


图1

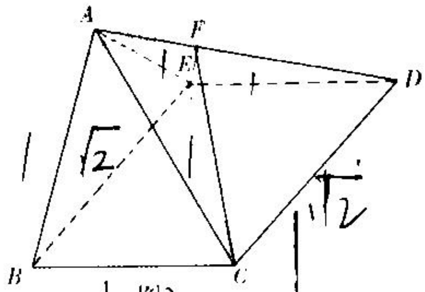
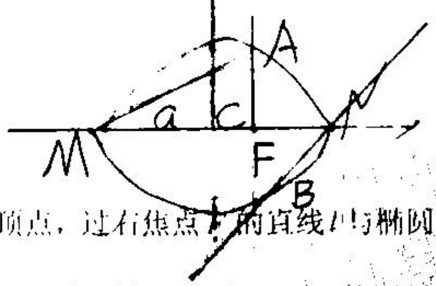


图2

（1）若$DE\perp CF$，求$\dfrac{AF}{FD}$的值；

（2）求平面ABC与平面AED所成锐二面角的余弦值.



3 21.（12分）

已知M,N分别是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点，过右焦点$F$的直线$l$与椭圆$C$交于$A$，$B$两点.当直线$l$垂直于$x$轴时，$\triangle MAB$的重心为原点$O$，且$\triangle MAB$的面积为$\dfrac{9}{2}$.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）若A,B非椭圆顶点，直线AM与BN的交点为P，直线AN与BM的交点为Q，证明：$FP\perp FQ$.

22.（12分）

已知函数$f(x)=\dfrac{x}{e^{ax}}$，其中a为实数.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)$有极大值且$f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$，求证：$x_1+x_2-\dfrac{2}{a}>0$.

学科网2022年高三2月大联考（新高考卷）

数学·全解全析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	C	D	B	D	B	B	ABD	AD	ABD	AB

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题日要求的．

1．C 【解析】由题可得 $A=\{x|x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{Z}\}=\{\cdots,-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\cdots\},B=\{x|x^2<1\}=\{x|-1<x<1\}$，则 $A\cap B=\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\}$，故选 C．

2．A 【解析】由题可得 $z=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$，所以 $|\bar{z}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，故选 A．

3．C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_4\cdot a_5=a_3\cdot a_6=-8$，

由 $\begin{cases}a_3\cdot a_6=-8\\a_3+a_6=2\end{cases}$，可得 $\begin{cases}a_3=4\\a_6=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_3=-2\\a_6=4\end{cases}$，因为 $a_6^2=a_3\cdot a_9$，所以 $a_9=\frac{a_6^2}{a_3}=1$ 或 -8，故选 C．

4．D 【解析】由题意可知，集合 A 中普罗斯数有 3,5,9，素数有 2,3,5,7，则集合 A 中普罗斯素数有 3,5，所以从集合 $A=\{x\in\mathbf{N}^*|1\le x\le 10\}$ 中任取两个数，恰有一个数是普罗斯素数的概率 $P=\frac{C_2^1C_8^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$，故选 D．

5．B 【解析】由 $\frac{x}{2-x}>0$ 得 $0<x<2$，所以 $A=\{x|0<x<2\}$．记不等式 $x^2+mx-2m^2<0(m>0)$ 的解集为 B，

因为 $m>0$，所以 $B=\{x|-2m<x<m\}$，由题可知 $\begin{cases}m\ge 2\\-2m\le 0\end{cases}$（等号不同时成立），解得 $m\ge 2$．故选 B．

6．D 【解析】因为 $\sin\alpha-3\cos\alpha=\sqrt{10}\sin(\alpha+\theta)=\sqrt{10}\sin\alpha\cos\theta+\sqrt{10}\cos\alpha\sin\theta$，

所以 $\sin\theta=\frac{-3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$，则 $\cos(2\theta+\frac{\pi}{4})=\cos 2\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2\theta\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\frac{1}{10}-\frac{9}{10}+2\times\frac{3}{10})=-\frac{\sqrt{2}}{10}$．故选 D．

7．B 【解析】因为 $f(x)=\mathrm{e}^{x+m}(x>0)$ 与 $g(x)=x^{\frac{1}{\mathrm{e}}}(x>0)$ 存在“分界线”，

所以根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象可知，当 $x>0$ 时，$f(x)>g(x)$ 恒成立，即 $\mathrm{e}^{x+m}>x^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，

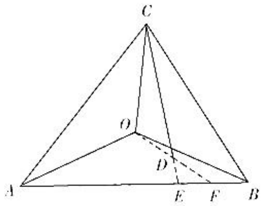
即 $x+m>\frac{1}{\mathrm{e}}\ln x$，即 $m>\frac{1}{\mathrm{e}}\ln x-x$，令 $h(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}\ln x-x$，则 $m>h(x)_{\max}$．

因为 $h'(x)=\frac{1}{\mathrm{e}x}-1=\frac{1-\mathrm{e}x}{\mathrm{e}x}$，所以当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$h'(x)<0$，

所以函数$h(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递增，在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递减，所以$h(x)_{\max}=h(\frac{1}{e})=-\frac{2}{e}$，

所以$m>-\frac{2}{e}$，所以实数m的取值范围为$(-\frac{2}{e},+\infty)$，故选B.

8. B 【解析】由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$知点$O$为$\triangle ABC$的重心，如图，连接$OD$并延长交$AB$于点$F$，延长$CD$交$AB$于点$E$.



设$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OF}(0<\lambda<1)$，$\overrightarrow{OF}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，其中$s+t=1$，则$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CO}+\lambda\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{CO}+\lambda(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{CO}+\lambda s(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO})+\lambda t(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CO})=\lambda s\overrightarrow{CA}+\lambda t\overrightarrow{CB}+(1-\lambda s-\lambda t)\overrightarrow{CO}$，

又$\overrightarrow{CO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，所以$\overrightarrow{CD}=(\lambda s+\frac{1-\lambda}{3})\overrightarrow{CA}+(\lambda t+\frac{1-\lambda}{3})\overrightarrow{CB}$，

所以$m+n=(\lambda s+\frac{1-\lambda}{3})+(\lambda t+\frac{1-\lambda}{3})=\lambda(s+t)+\frac{2-2\lambda}{3}=\frac{\lambda+2}{3}\in(\frac{2}{3},1)$，所以$\frac{1}{m+n}\in(1,\frac{3}{2})$.故选B.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. ABD 【解析】9位评委的评分的极差是$9.9-7.8=2.1$，故A正确；

9位评委的评分的中位数是8.8，故B正确；

9位评委的评分的平均分是$\frac{7.8+8.4+8.5+8.6+8.8+8.9+9.5+9.7+9.9}{9}=\frac{80.1}{9}=8.9$，故C错误；

9位评委的评分的方差为$s^2=\frac{1}{9}\times[(7.8-8.9)^2+(8.4-8.9)^2+(8.5-8.9)^2+(8.6-8.9)^2+(8.8-8.9)^2+(8.9-8.9)^2+(9.5-8.9)^2+(9.7-8.9)^2+(9.9-8.9)^2]=\frac{3.72}{9}=\frac{31}{75}$，故D正确，故选ABD.

10. AD 【解析】由题意可得圆M的直径OB=2，线段OB的中点即为圆M的圆心，所以圆M的方程为$x^2+(y-1)^2=1$，故A正确；

易知$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，从而可得$\angle xOC=\frac{\pi}{3}$，所以直线OC的斜率为$k_{OC}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，由$AB/\!/OC$可得直线$AB$的斜率为$k_{AB}=k_{OC}=\sqrt{3}$，故B错误；

连接PM，可得$\mathrm{Rt}\triangle PME\cong\mathrm{Rt}\triangle PMF$，所以四边形$PEMF$的面积为$S=2S_{\mathrm{Rt}\triangle PME}=|ME|\cdot|PE|=|PE|=\sqrt{|PM|^2-1}$，当直线$PM$与直线$2x+y-4=0$垂直时，$|PM|$最小，即$|PM|_{\min}=\frac{|2\times0+1-4|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

所以$S_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故C错误；

因为$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC})=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA})=\overrightarrow{PM}^2-\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{PM}^2-1$，$|PM|_{\min}=$

$\dfrac{|2\times0+1-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}^2-1\geq\dfrac{9}{5}-1=\dfrac{4}{5}$，故D正确.故选AD.

11. ABD 【解析】由$2^x+2^{y+1}=1$，得$2^{y+1}=1-2^x>0$，$2^x=1-2^{y+1}>0$，所以$x<0$且$y<-1$，故A正确；

由$2^x+2^{y+1}=1\geq2\sqrt{2^x\cdot2^{y+1}}=2\sqrt{2^{x+y+1}}$，得$m=x+y\leq-3$，当且仅当$x=y+1=-1$，即$x=-1,y=-2$时，等号成立，所以$m$的最大值为$-3$，故B正确；

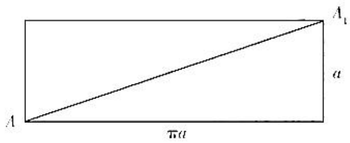
$n=(\frac{1}{2})^x+(\frac{1}{2})^{y-1}=[(\frac{1}{2})^x+(\frac{1}{2})^{y-1}](2^x+2^{y+1})=5+\dfrac{2\times2^y}{2^x}+\dfrac{2\times2^x}{2^y}\geq5+2\sqrt{\dfrac{2\times2^y}{2^x}\cdot\dfrac{2\times2^x}{2^y}}=9$，当且仅当$\dfrac{2\times2^y}{2^x}=\dfrac{2\times2^x}{2^y}$，即$x=y=-\log_2 3$时，等号成立，所以$n$的最小值为$9$，故C错误；

$n\cdot2^m=[(\frac{1}{2})^x+(\frac{1}{2})^{y-1}]\cdot2^{x+y}=2^y+2^{x-1}=2-3\times2^y<2$，故D正确.故选ABD.

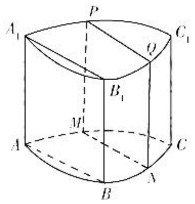
12. AB 【解析】由题意可知，底面由三条圆弧构成，且每条圆弧所在圆的半径都为a，所对的圆心角度数都为$\dfrac{\pi}{3}$，所以上、下底面的周长均为$3\times\dfrac{\pi}{3}a=\pi a$，设曲侧面三棱柱的高为$h$，则曲侧面三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面积为$\pi ah=\pi a^2$，即$h=a$，故A正确；

曲侧面三棱柱的上、下底面积均为$S=\dfrac{a^2}{2}\times\dfrac{\pi}{3}+2(\dfrac{a^2}{2}\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2)=\dfrac{a^2}{2}(\pi-\sqrt{3})$，故B正确；

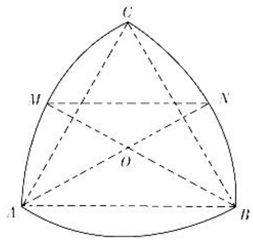
如图，将侧面展开后可得到一个矩形，对角线AA_1的长度即为最小值，计算可得最小值为$a\sqrt{\pi^2+1}$，故C错误；



如图（1），取M,P,Q分别是$\overset{\frown}{AC},\overset{\frown}{A_1C_1},\overset{\frown}{B_1C_1}$的中点，连接$MN$，$MP$，$PQ$，$NQ$，在图（2）中连接$AN$，$BM$交于点$O$，则$\angle AOB=120°$，且$OA=OB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，因为$MN//AB$，所以$MN$ //平面A_1ABB_1.因为$PM//A_1A$，所以PM//平面A_1ABB_1，又$MN\cap PM=M$，所以平面PMN //平面A_1ABB_1，因为MN // PQ，所以平面$PMNQ$ //平面A_1ABB_1，故平面$PMNQ$即为平面α，矩形$PMNQ$即为平面α截该曲侧面三棱柱所得的图形，因为$OM=ON=a-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，所以$MN=\sqrt{3}(a-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)=(\sqrt{3}-1)a$，所以矩形$PMNQ$的周长为$2(\sqrt{3}-1)a+2a=2\sqrt{3}a$，故D错误.故选AB.



图（1）



图（2）

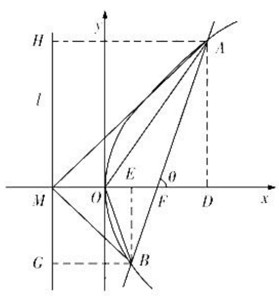
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．1 【解析】因为函数 $f(x)=2^{3x^2+ax+b}$ 是偶函数，所以 a=0，又因为 $f(1)=16$，所以 $2^{3+b}=16$，所以 $b=1$，所以 $2a+b=1$．

14．52π 【解析】因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp$ 平面ABC．设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R，结合底面△ABC 的外接圆的半径 r=3，可得 $R^2=(\frac{PA}{2})^2+r^2=2^2+3^2=13$，所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $S_{表}=4\pi R^2=52\pi$．

15．1 【解析】因为 $f(0)=\frac{1}{2}$，所以 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$．设函数 $f(x)$的最小正周期为 T，因为 $y=|f(x)|$的图象上相邻两对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，从而 $T=\pi$，即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，从而 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，当 $x\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$，则 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})\in[\frac{1}{2},1]$，故 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}]$ 上的最大值为 1．

16．$2\sqrt{2}$ 【解析】如图，不妨设点 A 在第一象限，点 B 在第四象限，直线 AB 的倾斜角为 $\theta(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}])$，由题意可知，过点 M 且垂直于 x 轴的直线即为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线 l，过点 A 作 $AD\perp x$ 轴，$AH\perp l$，过点 B 作 $BE\perp x$ 轴，$BG\perp l$.



则 $|AF|=|AH|=|MF|+|FD|=p+|AF|\cos\theta$，所以 $|AF|=\frac{p}{1-\cos\theta}$．同理，$|BF|=\frac{p}{1+\cos\theta}$．

所以 $|AF|\cdot|BF|=\frac{p^2}{\sin^2\theta}=8$．

显然$\frac{|AD|}{|BE|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|DM|}{|EM|}$，则Rt$\triangle ADM\backsim$Rt$\triangle BEM$，所以$\angle AMD=\angle BMD$，即$MF$为$\angle AMB$的平分线，由角平分线定理得$\frac{|AM|}{|AF|}=\frac{|BM|}{|BF|}$，因为$2|AM|\cdot|BM|=3|AF|\cdot|BF|$，所以$\frac{|AM|\cdot|BM|}{|AF|\cdot|BF|}=\frac{3}{2}$，所以$\frac{|AM|^2}{|AF|^2}=\frac{3}{2}$，即$\frac{|AM|}{|AF|}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以$\frac{|DM|}{|AM|}=\frac{|AF|}{|AM|}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\cos\angle AMD=\cos\angle MAH$，所以

$\tan\angle MAH=\frac{|HM|}{|AH|}=\frac{|AD|}{|AF|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\theta=\frac{\pi}{4}$，$p=2$，

则$|AF|=\frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{2-\sqrt{2}}=2(2+\sqrt{2})$，$|BF|=\frac{2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{2+\sqrt{2}}=2(2-\sqrt{2})$，

所以$|AD|=\frac{|AF|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(2+\sqrt{2})$，$|BE|=\frac{|BF|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$，

所以$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot|OF|\cdot(|AD|+|BE|)=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）

【解析】（1）在$\triangle ADC$中，由正弦定理可得$\frac{CD}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，（1分）

所以$\frac{\sqrt{7}}{\sin\angle BAC}=\frac{\sqrt{21}}{\sin120^\circ}$，即$\sin\angle BAC=\frac{1}{2}$．（2分）

易知$\angle BAC$为锐角，（3分）

所以$\angle BAC=30^\circ$．（4分）

（2）在$\triangle ADC$中，因为$\angle ACD=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ=\angle DAC$，所以$AD=CD=\sqrt{7}$，

所以$AB=AD+BD=AD+kAD=\sqrt{7}(k+1)$．（5分）

由余弦定理可得$BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos\angle BAC}$（6分）

$=\sqrt{21+7(k+1)^2-2\sqrt{21}\times\sqrt{7}(k+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7(k^2-k+1)}$，（7分）

因为BC边上的高为$2\sqrt{3}$，所以由面积相等可得$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}BC\cdot2\sqrt{3}$，

所以$\frac{1}{2}\times\sqrt{7}(k+1)\times\sqrt{21}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{7(k^2-k+1)}\times2\sqrt{3}$，（8分）

解之得$k=3$或$k=\frac{1}{3}$．（10分）

18．（12分）

【解析】（1）由$na_{n+1}-2n^2=(n+1)a_n+2n$，可得$na_{n+1}-(n+1)a_n=2n(n+1)$，

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

上式两边同时除以$n(n+1)$，可得$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=2$，（2分）

又$\frac{a_1}{1}=1$，所以数列$\{\frac{a_n}{n}\}$是以1为首项，2为公差的等差数列，（4分）

所以$\frac{a_n}{n}=1+2(n-1)=2n-1$，所以$a_n=n(2n-1)$．（6分）

（2）由（1）可知$a_n=n(2n-1)$，

当$n\geq 2$时，$\frac{1}{a_n-n}=\frac{1}{2n(n-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$，（8分）

所以$T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2-2}+\frac{1}{a_3-3}+\cdots+\frac{1}{a_n-n}=1+\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})]$

$=1+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})=\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}=\frac{3n-1}{2n}$，（10分）

当$n=1$时，$T_1=\frac{1}{a_1}=1$，符合上式，（11分）

所以$T_n=\frac{3n-1}{2n},n\in\mathbf{N}^*$．（12分）

19．（12分）

【解析】（1）由题知，$[50,60),[90,100],[60,70)$这三组的频率成等差数列，设公差为d，

则$0.008\times10+0.008\times10+d+0.008\times10+2d+0.028\times10+0.036\times10=1$，（1分）

解得$d=0.04$，（2分）

所以成绩在$[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100]$内的频率分别为$0.08,0.16,0.36,0.28,0.12$.

因为成绩在$[60,70)$的学生有16人，所以$\frac{16}{m}=0.16$，解得$m=100$．（3分）

设这m名学生本次竞赛成绩的中位数为x，则$0.08+0.16+0.036\times(x-70)=0.5$，（4分）

解得$x\approx77.22$.所以这m名学生本次竞赛成绩的中位数为77.22．（5分）

（2）由题意知，分层抽样抽取的10人中，成绩在$[80,90)$的学生有7人，成绩在$[90,100]$的学生有3人．（7分）

随机变量ξ的所有可能取值为0，1，2，3.

则$P(\xi=0)=\frac{C_7^3C_{n+3}^0}{C_{n+10}^3}$，$P(\xi=1)=\frac{C_7^2C_{n+3}^1}{C_{n+10}^3}$，$P(\xi=2)=\frac{C_7^1C_{n+3}^2}{C_{n+10}^3}$，$P(\xi=3)=\frac{C_7^0C_{n+3}^3}{C_{n+10}^3}$，

所以随机变量ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{C_7^3C_{n+3}^0}{C_{n+10}^3}$	$\frac{C_7^2C_{n+3}^1}{C_{n+10}^3}$	$\frac{C_7^1C_{n+3}^2}{C_{n+10}^3}$	$\frac{C_7^0C_{n+3}^3}{C_{n+10}^3}$

（9分）

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

则 $E\xi=\dfrac{C_7^3C_{n+3}^0}{C_{n+10}^3}\times0+\dfrac{C_7^2C_{n+3}^1}{C_{n+10}^3}\times1+\dfrac{C_7^1C_{n+3}^2}{C_{n+10}^3}\times2+\dfrac{C_7^0C_{n+3}^3}{C_{n+10}^3}\times3\ge2$，（10 分）

即 $C_7^2(n+3)+7(n+3)(n+2)+\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2}\ge\dfrac{(n+10)(n+9)(n+8)}{3}$，

即 $42(n+3)+14(n+3)(n+2)+(n+3)(n+2)(n+1)\ge\dfrac{2(n+10)(n+9)(n+8)}{3}$，

即 $(n+3)(n^2+17n+72)\ge\dfrac{2(n+10)(n+9)(n+8)}{3}$，（11 分）

即 $n+3\ge\dfrac{2}{3}(n+10)$，

解得 $n\ge11$，所以 n 的最小值为 11.（12 分）

20.（12 分）

【解析】（1）如图，连接 CE.由题意可知，$\triangle ABE$，$\triangle CED$，$\triangle BCE$ 均为等腰直角三角形，

因为 $BC/\!/ED$，所以 $\angle ABC$ 即为异面直线 AB 与 ED 所成的角，

所以 $\angle ABC=60°$，所以 $AC=1$.（1 分）

取 BE 的中点 O，连接 OC，OA，则 $OA\perp BE$，$OC\perp BE$，且 $OA=OC=\dfrac{\sqrt2}{2}$，

因为 $OA^2+OC^2=AC^2$，所以 $OA\perp OC$，（2 分）

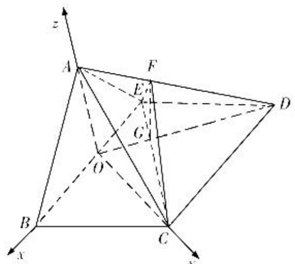
因为 $BE\cap OC=O$，所以 $OA\perp$ 平面 $BCDE$.（3 分）

连接 EF，因为 $DE\perp EC$，$DE\perp CF$，$CE\cap CF=C$，所以 $DE\perp$ 平面 ECF，

又 $DE\subset$ 平面 $BCDE$，所以平面 $ECF\perp$ 平面 $BCDE$，故 $OA/\!/$ 平面 ECF.（4 分）

连接 OD 交 CE 于点 G，连接 FG，因为平面 $AOD\cap$ 平面 $ECF=FG$，

所以 $OA/\!/GF$，故 $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{OG}{GD}=\dfrac{OE}{CD}=\dfrac12$.（5 分）



（2）如图，以 O 为坐标原点，OB，OC，OA 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $A(0,0,\dfrac{\sqrt2}{2})$，$C(0,\dfrac{\sqrt2}{2},0)$，$B(\dfrac{\sqrt2}{2},0,0)$，$E(-\dfrac{\sqrt2}{2},0,0)$，$D(-\sqrt2,\dfrac{\sqrt2}{2},0)$.（6 分）

所以 $\overrightarrow{AB}=(\dfrac{\sqrt2}{2},0,-\dfrac{\sqrt2}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2},0)$，$\overrightarrow{AE}=(-\dfrac{\sqrt2}{2},0,-\dfrac{\sqrt2}{2})$，$\overrightarrow{ED}=(-\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2},0)$.（7 分）

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}z_1=0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_1=0\end{cases}$，（8 分）

令 $x_1=2$，则 $y_1=2$，$z_1=2$，所以平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(2, 2, 2)$，（9 分）

设平面 AED 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{ED}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2-\frac{\sqrt{2}}{2}z_2=0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}y_2=0\end{cases}$，（10 分）

令 $x_2=2$，则 $y_2=2$，$z_2=-2$，所以平面 AED 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(2, 2, -2)$，（11 分）

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}|=|\frac{2\times2+2\times2-2\times2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}}|=\frac{1}{3}$，

故平面 ABC 与平面 AED 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{1}{3}$．（12 分）

21．（12 分）

【解析】（1）当直线 l 垂直于 x 轴时，$\triangle MAB$ 的重心为原点 O，则 $|OM|:|OF|=a:c=2:1$，

所以 $a=2c, b=\sqrt{3}c$．（1 分）

当 $x=c$ 时，$y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以 $|AB|=\frac{2b^2}{a}$，

所以 $\triangle MAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(a+c)\times\frac{2b^2}{a}=\frac{9c^2}{2}=\frac{9}{2}$，（2 分）

解得 $c^2=1$，即 $c=1$．（3 分）

所以 $a=2, b=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．（4 分）

（2）由题意，可设直线 $l: x=ky+1$，联立椭圆方程可得 $\begin{cases}x=ky+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，

消去 x 并整理得 $(3k^2+4)y^2+6ky-9=0$，（5 分）

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{6k}{3k^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3k^2+4}$，（6 分）

而 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，则直线 $AM: y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 $BN: y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

所以联立两直线方程可得 $\frac{x-2}{x+2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{y_1(ky_2-1)}{y_2(ky_1+3)}=\frac{ky_1y_2-y_1}{ky_1y_2+3y_2}$

$$=\frac{-\frac{9k}{3k^2+4}+\frac{6k}{3k^2+4}+y_2}{-\frac{9k}{3k^2+4}+3y_2}=\frac{-\frac{3k}{3k^2+4}+y_2}{-\frac{9k}{3k^2+4}+3y_2}=\frac{1}{3}$$.（7 分）

所以 $x=4$，所以点 P 的坐标为 $(4,\frac{6y_1}{x_1+2})$.（8 分）

同理可得点 Q 的坐标为 $(4,\frac{6y_2}{x_2+2})$.（9 分）

又 $F(1,0)$，所以 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=9+\frac{36y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=9+\frac{36y_1y_2}{(ky_1+3)(ky_2+3)}$（10 分）

$$=9+\frac{36y_1y_2}{k^2y_1y_2+3k(y_1+y_2)-9}$$

$$=9+\frac{36(-\frac{9}{3k^2+4})}{k^2(-\frac{9}{3k^2+4})+3k(-\frac{6k}{3k^2+4})+9}$$

$=0$，（11 分）

故 $FP\perp FQ$.（12 分）

22.（12 分）

【解析】（1）由题知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=\frac{1-ax}{e^{ax}}$.（1 分）

若 $a=0$，则 $f(x)=x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；（2 分）

若 $a>0$，则由 $f'(x)=\frac{1-ax}{e^{ax}}>0$ 得 $x<\frac{1}{a}$，由 $f'(x)=\frac{1-ax}{e^{ax}}<0$ 得 $x>\frac{1}{a}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减；（3 分）

若 $a<0$，由 $f'(x)=\frac{1-ax}{e^{ax}}>0$ 得 $x>\frac{1}{a}$，由 $f'(x)=\frac{1-ax}{e^{ax}}<0$ 得 $x<\frac{1}{a}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 上单调递减.（4 分）

综上所述，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 上单调递减.（5 分）

（2）由（1）知，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有极大值.

$\because f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\frac{1}{a})$，单调递减区间为 $(\frac{1}{a},+\infty)$，$\therefore x=\frac{1}{a}$ 为极大值点，

又 $f(0)=0$，且当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，$\therefore$不妨设 $x_1>\frac{1}{a}>x_2>0$.（6 分）

$\because f(x_1)=f(x_2)$，即 $\frac{x_1}{e^{ax_1}}=\frac{x_2}{e^{ax_2}}>0$，

$\therefore \ln x_1-ax_1-\ln x_2-ax_2$ ①.

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $x_1=tx_2(t>1)$，将其代入①式得：$x_2=\frac{\ln t}{a(t-1)},x_1=\frac{t\ln t}{a(t-1)}$.（7 分）

要证 $x_1+x_2-\frac{2}{a}>0$ 成立，只需证 $\frac{\ln t}{a(t-1)}+\frac{t\ln t}{a(t-1)}-\frac{2}{a}>0$ 成立，

即证 $\ln t+t\ln t-2t+2>0$ 成立.（8 分）

设 $g(t)=\ln t+t\ln t-2t+2(t>1)$，则 $g'(t)=\frac{1}{t}+\ln t-1$.（9 分）

设 $h(t)=g'(t)=\frac{1}{t}+\ln t-1(t>1)$，则 $h'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t^2}>0$，$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

$\therefore h(t)>h(1)=0$，即 $g'(t)>0$，

$\therefore g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，（10 分）

$\therefore g(t)>g(1)=0$，即 $\ln t+t\ln t-2t+2>0$ 成立.（11 分）

$\therefore x_1+x_2-\frac{2}{a}>0$ 成立.（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜
自主选拔在线