

数学参考答案

一、选择题

1. B 2. A 3. C 4. B 5. D 6. A 7. C 8. BCD 9. BD 10. AC

二、填空题

11. 70 12. -1 13. $2\sqrt{2}$ 14. $(-2, 1)$; $\lambda < -2$ 或 $0 \leq \lambda < 1$

三、解答题

15. 解: (1) $\angle BED = \pi - \angle AEB = \frac{\pi}{4}$,

在三角形 BDE 中, $\frac{DE}{\sin \angle DBE} = \frac{BD}{\sin \angle BED}$,

$$\frac{6}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{BD}{\sin \frac{\pi}{4}}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{BD}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad BD = 6\sqrt{2}; \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 因为 $\triangle BED \sim \triangle ABD$, 所以 $\angle C = \angle A = \angle DBE = \frac{\pi}{6}$, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

在三角形 BDC 中, $BD^2 = DC^2 + BC^2 - 2DC \cdot BC \cdot \cos \frac{\pi}{6}$,

$$\text{所以 } 72 = DC^2 + BC^2 - \sqrt{3}DC \cdot BC, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 72 \geq 2DC \cdot BC - \sqrt{3}DC \cdot BC,$$

$$\text{所以 } DC \cdot BC \leq 72(2 + \sqrt{3}), \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}DC \cdot BC \cdot \sin \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{4} \times 72(2 + \sqrt{3}) = 18(2 + \sqrt{3}),$$

$$\text{所以三角形 } BCD \text{ 面积的最大值为 } 36 + 18\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

16. 解: (1) 因为 $AB = AD = 2$, $BD = 2\sqrt{2}$, 所以 $AB^2 + AD^2 = BD^2$, 所以 $AB \perp AD$,

又因为 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $AB \perp BC$, $AD \perp DC$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

因为 $AB = 2$, $BP = 2\sqrt{2}$, $PA = 2\sqrt{3}$, 所以 $AB^2 + BP^2 = AP^2$, 所以 $AB \perp BP$,

因为 $PB \cap BC = B$, 所以 $AB \perp$ 平面 BPC , 所以 $AB \perp CP$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为 $AD = 2$, $DP = 2\sqrt{2}$, $PA = 2\sqrt{3}$, 所以 $AD^2 + DP^2 = AP^2$, 所以 $AD \perp DP$,

因为 $PD \cap DC = D$, 所以 $AD \perp$ 平面 PCD , 所以 $AD \perp CP$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

数学试题 (第 6 页, 共 12 页)

因为 $AD \cap AB = A$, 所以 $PC \perp$ 平面 $ABCD$4 分

(2) 由 (1) 知, CD, CB, CP 两两垂直, 分别以 CD, CB, CP 所在的直线为 x, y, z 轴, 建立如图

所示的平面直角坐标系, 在三角形 PBC 中, $PC = \sqrt{PB^2 - BC^2} = 2$, 则 $A(2, 2, 0)$,

$B(0, 2, 0), C(0, 0, 0), D(2, 0, 0), E(0, 1, 0), P(0, 0, 2)$.

.....5 分

所以 $\overrightarrow{DE} = (-2, 1, 0)$, $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DE} = (-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0)$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = (-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, 0)$.

$\overrightarrow{PA} = (2, 2, -2)$, 设平面 PAF 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

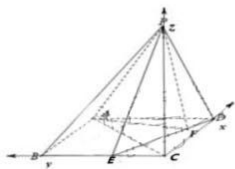
$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases},$$

令 $y = 1$, 得 $x = -2$, $z = -1$, 于是取 $\mathbf{m} = (-2, 1, -1)$,6 分

又由 (1) 知, 底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AC \perp BD$,

因为 $PC \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PC \perp BD$,

因为 $AC \cap PC = C$, 所以 $BD \perp$ 平面 ACP .



所以 $\overrightarrow{BD} = (2, -2, 0)$ 平面 PAC 的一个法向量,7 分

设二面角 $F-PA-C$ 的大小为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \left| \cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{BD} \rangle \right| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \times \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以二面角 $F-PA-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$8 分

17. 解: 由题意知:

$$\mu = 35 \times 0.025 + 45 \times 0.15 + 55 \times 0.2 + 65 \times 0.25 + 75 \times 0.225 + 85 \times 0.1 + 95 \times 0.05 = 65,$$

.....1 分

$$\text{又 } 50.5 \approx 65 - \sqrt{210}, \quad 94 \approx 65 + 2\sqrt{210},$$

所以 $P(50.5 < Z < 94) = \frac{1}{2} \times 0.6827 + \frac{1}{2} \times 0.9545 = 0.8186$2 分

(2) 由题意得列联表如下:

	不太了解	比较了解	合计
男性	235	315	550
女性	140	310	450
合计	375	625	1000

.....3 分

$$K^2 = \frac{1000 \times (235 \times 310 - 315 \times 140)^2}{375 \times 625 \times 550 \times 450} \approx 14.249 > 6.635, \quad \text{.....4 分}$$

所以有 99% 的把握认为学生对垃圾分类的了解程度与性别有关.5 分

(3) 不低于 80 分的被调查者的男女比例为 3:2, 所以采用分层抽样的方法抽取 10 人中, 男性为 6 人, 女性为 4 人.6 分

设从这 10 人中随机抽取的 3 人中男性人数为 ξ , 则 ξ 的取值为 0, 1, 2, 3

$$P(\xi = 0) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}, \quad P(\xi = 1) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}, \quad P(\xi = 3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6},$$

所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

.....8 分

所以其期望 $E(\xi) = \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{5}$ 9 分

18. 解: (1) 由题意知

可得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^2 - b^2 = c^2$, $\frac{8}{3a^2} + \frac{1}{3b^2} = 1$, 解得 $a = 2$, $b = 1$,2 分

数学试题 (第 8 页, 共 12 页)

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;3 分

(2) 由题意, 直线 MN 的斜率存在且不为 0, 设直线 MN 方程为 $y = kx + m$,

设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, \text{得} (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1 + 4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{4k^2 + 1},$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{1 + 4k^2}.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OQ},$$

$$\text{所以 } Q\left(\frac{-16km}{1 + 4k^2}, \frac{4m}{1 + 4k^2}\right),$$

$$\text{因为 } Q \text{ 在椭圆上, 所以 } \frac{\left(\frac{-16km}{1 + 4k^2}\right)^2}{4} + \left(\frac{4m}{1 + 4k^2}\right)^2 = 1,$$

化简得 $16m^2 = 1 + 4k^2$,5 分

满足 $\Delta > 0$,

又因为直线 HM 与直线 HN 倾斜角互补,

$$\text{所以 } k_{HE} + k_{HF} = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{y_1 + \frac{1}{2}}{x_1} + \frac{y_2 + \frac{1}{2}}{x_2} = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{kx_1 + m + \frac{1}{2}}{x_1} + \frac{kx_2 + m + \frac{1}{2}}{x_2} = 0,$$

$$\text{所以 } 2kx_1 x_2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)(x_1 + x_2) = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{4k(m + 2)}{1 + 4k^2} = 0, \quad \text{.....7 分}$$

因为 $k \neq 0$, 所以 $m = -2$, 代入 $16m^2 = 1 + 4k^2$ 得 $k = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2}$,8 分

所以存在满足条件的三个点, 此时直线 MN 的方程为 $y = \frac{3\sqrt{7}}{2}x - 2$ 或

$$y = -\frac{3\sqrt{7}}{2}x - 2. \quad \text{.....9 分}$$

19. 解: (1) $f'(x) = \ln x + 1 + ax \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,1 分

$$\text{所以 } a \leq \frac{-\ln x - 1}{x},$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{-\ln x - 1}{x}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{\ln x}{x^2},$$

由 $\frac{\ln x}{x^2} > 0$, 得 $x > 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

由 $\frac{\ln x}{x^2} < 0$, 得 $0 < x < 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减,

所以当 $x = 1$ 时, $h(x)$ 取得最小值 $h(1) = -1$,2 分

所以 $a \leq -1$3 分

$$(2) (i) g(x) = \frac{a}{2}x^2 + x \cos x - \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{所以 } g'(x) = x(a - \sin x),$$

当 $a \geq 1$ 时, $a - \sin x \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增,

又因为 $g(0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上无零点.4 分

当 $0 < a < 1$ 时, $\exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $\sin x_0 = a$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right]$ 单调递减, 在 $(0, x_0)$ 单调

递增, 又因为 $g(0) = 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a\pi^2}{8} - 1$,

所以若 $\frac{a\pi^2}{8} - 1 > 0$, 即 $a > \frac{8}{\pi^2}$ 时, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上无零点,5 分

若 $\frac{a\pi^2}{8} - 1 \leq 0$, 即 $0 < a \leq \frac{8}{\pi^2}$ 时, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有一个零点,6 分

当 $a \leq 0$ 时 $g'(x) = a - x \sin x < 0$, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

$g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上无零点,

综上当 $0 < a \leq \frac{8}{\pi^2}$ 时, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有一个零点7 分

(ii) 证明: 要证当 $x > 1$ 时, $(x-1)\left[f(x) - \frac{a}{2}x^2\right] > ax \ln x$,

只需证 $(x-1)[x \ln x + 1] > ax \ln x$

只需证 $\ln x + \frac{1}{x} > a \frac{\ln x}{x-1}$,8 分

设 $F(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $x \geq 1$

$F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, 所以 $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $F(x) > F(1) = 1$,

由 (1) 知, $a = -1$ 时, $f'(x) = \ln x + 1 - x \leq 0$, 即 $\ln x \leq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号,

所以当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$

即 $\frac{\ln x}{x-1} < 1$,

所以 $\ln x + \frac{1}{x} > \frac{\ln x}{x-1}$,9 分

又因为 $0 < a \leq \frac{8}{\pi^2}$, 所以 $a < 1$,

所以 $\frac{\ln x}{x-1} > a \frac{\ln x}{x-1}$,

所以 $\ln x + \frac{1}{x} > a \frac{\ln x}{x-1}$

即 $x > 1$, 不等式 $(x-1)\left[f(x) - \frac{a}{2}x^2\right] > ax \ln x$ 成立.10 分

(法二) 证明: 要证当 $x > 1$ 时, $(x-1)\left[f(x) - \frac{a}{2}x^2\right] > ax \ln x$,

只需证 $(x-1)[x \ln x + 1] > ax \ln x$

只需 $(x-1)\left[\ln x + \frac{1}{x}\right] > a \ln x$ 8 分

又因为 $0 < a \leq \frac{8}{\pi^2}$, 所以 $a < 1$,

只需证, $(x-1)\left[\ln x + \frac{1}{x}\right] > \ln x$ 9 分

只需 $x - 1 > \ln x$ 且 $\ln x + \frac{1}{x} > 1$

设 $F(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $x \geq 1$

$F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, 所以 $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $F(x) > F(1) = 1$,

由 (1) 知, $a = -1$ 时, $f'(x) = \ln x + 1 - x \leq 0$, 即 $\ln x \leq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号,

所以当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$

即 $x > 1$, 不等式 $(x-1)\left[f(x) - \frac{a}{2}x^2\right] > ax \ln x$ 成立.10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》