2022学年第二学期期中杭州地区(含周边)重点中学

高二年级数学学科参考答案

一、选择题： 每小题5分，共40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	B	B	D	A	C

二、多项选择题： 每小题5分，全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分

题号	9	10	11	12
答案	AC	BC	BCD	ACD

三、填空题： 本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 211　　14. $\dfrac{n}{2n+1}$　　15. $\dfrac{208}{9}$　　16. $(1,+\infty)$

四、解答题： 本题包括6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：

（1）$a_n-a_{n-1}=4n-1(n\ge 2),\therefore a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2n^2+n,$

$a_1=3$ 也满足上式. $b_1=9c-\dfrac{3}{2},b_2=18c,b_3=54c,\therefore$ 公比 $q=3,b_1=6c=9c-\dfrac{3}{2},c=\dfrac{1}{2},\therefore b_1=3$.

$\therefore b_n=3^n$.　$a_n=2n^2+n$ …………………………………4分

（2）$\dfrac{a_n}{nb_n}=\dfrac{2n+1}{3^n}$，$\therefore T_n=\dfrac{3}{3}+\dfrac{5}{3^2}+\dfrac{7}{3^3}+\cdots\dfrac{2n+1}{3^n}$ …………………………………6分

$\therefore \dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\dfrac{7}{3^4}+\cdots\dfrac{2n-1}{3^n}+\dfrac{2n+1}{3^{n+1}}$，$\therefore \dfrac{2}{3}T_n=1+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\cdots+\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{2n+1}{3^{n+1}}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2n+4}{3^{n+1}}$ 8分

$\therefore T_n=2-\dfrac{n+2}{3^n}<2$ …………………………………10分

18. 解：

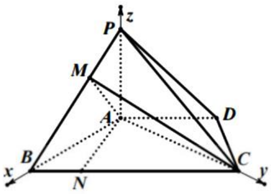
（1）作 $AN\perp BC$，垂足为 N，则 $BN=\dfrac{1}{2},\therefore AB=1,\therefore$ 由余弦定理, $AC=\sqrt{3},\therefore AC^2+AB^2=BC^2$

$\therefore AB\perp AC$.又 $AB\perp PA,\therefore AB\perp$ 平面 PAC. $\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PAC 3分

（2）由（1），可以点 A 为坐标原点建系如图. $\because \angle PBA=60^\circ,\therefore PA=\sqrt{3}.\therefore P(0,0,\sqrt{3}),B(1,0,0),$

$D(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0),\ C(0,\sqrt{3},0),$

设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BP}=(-\lambda,0,\sqrt{3}\lambda),\therefore \overrightarrow{AM}=(1-\lambda,0,\sqrt{3}\lambda),$ 5分



平面 MAC 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$.

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=(x,y,z)\cdot(1-\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=(x,y,z)\cdot(0,\sqrt{3},0)=0\end{cases}$

可取 $\vec{m}=(\sqrt{3}\lambda,0,\lambda-1)$，..................7分

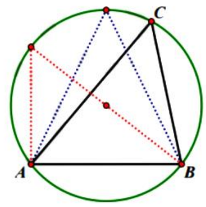
则 $\frac{\sqrt{3}}{4}=|\cos<\vec{m},\overrightarrow{AD}>|=\frac{|-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda|}{\sqrt{3\lambda^2+(\lambda-1)^2}},\therefore \lambda=\frac{1}{2},\therefore M$是$BP$中点, ...9 分

$\frac{\sqrt{3}}{4}=|\cos<\vec{m},\overrightarrow{AD}>|=\frac{|-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda|}{\sqrt{3\lambda^2+(\lambda-1)^2}},\therefore \lambda=\frac{1}{2},\therefore M$是$BP$中点,$\therefore \vec{m}=(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2})$

同理可求平面 PBC 的法向量$\vec{n}=(\sqrt{3},1,1)$，即平面 MAC 的法向量. ....11 分

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即为所求平面夹角的余弦值. ....12 分

19．解：



（1）①$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin C\cos A+1/2\sin A$,

$\because \sin A>0,\therefore \cos C=\frac{1}{2},\therefore C=\frac{\pi}{3}$ ………………………………3 分

② $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,\therefore \sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C$, 故

可取 $A=40^\circ,B=80^\circ$，

则 $\sin^2 40^\circ-\sin 40^\circ\sin 80^\circ+\sin^2 80^\circ=\sin^2 40^\circ-2\sin 40^\circ\sin 80^\circ\cos 60^\circ+\sin^2 80^\circ$，

$=\sin^2 60^\circ$，故 $C=\frac{\pi}{3}$

（2）令$|CD|=m$，则 $S=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}am\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}bm\sin\frac{\pi}{6}\to m=\frac{\sqrt{3}ab}{a+b}$ …5 分

又 $c^2=4=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab,\therefore 3ab=(a+b)^2-4,\therefore m=\frac{1}{\sqrt{3}}[(a+b)-\frac{4}{a+b}]$. …7 分

$t=a+b=\frac{c}{\sin C}(\sin A+\sin B)=\frac{4}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin(\frac{2\pi}{3}-A))=4\sin(A+\frac{\pi}{6})$ …………10 分

$A\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}),\therefore \sin(A+\frac{\pi}{6})\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1],\therefore t\in(2\sqrt{3},4]$, $y=t-\frac{4}{t}$ 在 $(2\sqrt{3},4]$ 上单调递增，

$\therefore |CD|\in(\frac{4}{3},\sqrt{3}]$ ………………………………12 分

20．解：

（1）不低于 70 分的学生人数为$(0.35+0.1+0.05)\times 100=50$.设从中选出 1 人是男生为事件 A，成绩在 80 分以上为事件 B，则 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{(0.09+0.03)\times 100}{(0.28+0.09+0.03)\times 100}=\frac{3}{10}$，...............4 分

（2）X 的分布列为：

X	45	55	65
P	0.2	0.3	0.5

，..................6 分

$\therefore$ 期望$E(X)=45\times 0.2+55\times 0.3+65\times 0.5=58$ ....8 分

（3）由题意知 $P(N|M)>P(N|\overline{M})$, 即 $\frac{P(NM)}{P(M)}>\frac{P(N\overline{M})}{P(\overline{M})}=\frac{P(N)-P(NM)}{1-P(M)}$，

即 $P(MN)>P(M)P(N)$,即$P(MN)-P(N)P(MN)>P(M)P(N)-P(N)P(MN)$

即 $P(MN)P(\overline{N})>P(N)P(\overline{N}M)$,即$\frac{P(MN)}{P(N)}>\frac{P(\overline{N}M)}{P(\overline{N})}$

即 $P(M|N)>P(M|\overline{N})$ ....12 分

21．解：

（1）设点 $P(x,y)$，则 $E=\{P\,|\,k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{1}{4}\}$，

依题意，得 $\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=\frac{1}{4}$，$x\neq\pm2$，化简得 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$（$x\neq\pm2$），............3 分

（2）显然直线 l 的斜率不为 0，可设直线 l 的方程为 $x=ty+4$， ....4 分

当 $t=0$ 时，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1,\\ x=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=\pm\sqrt{3},\end{cases}$ 若 $M(4,-\sqrt{3})$，$N(4,\sqrt{3})$，

则 AM，BN 的方程分别为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)$，交点 Q 的坐标为 $(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

若 $M(4,\sqrt{3})$，$N(4,-\sqrt{3})$，同理可求得 $Q(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

若交点 Q 在一条定直线上，则该直线只能为 $x=1$. ....6 分

以下证明当 t 改变时，直线 AM 与 BN 交点 Q 在点直线 $x=1$ 上.事实上，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1,\\ x=ty+4,\end{cases}$

得 $(t^2-4)y^2+8ty+12=0$，

当 $t^2-4=0$，即 $t=\pm2$ 时，不合题意，所以 $t\neq\pm2$，$\Delta=16t^2+192>0$，

记 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{8t}{t^2-4}$，$y_1y_2=\frac{12}{t^2-4}$， ....8 分

AM，BN 的方程分别为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，要证明交点 Q 在一条定直线 $x=1$ 上，只需证明 $\frac{3y_1}{x_1+2}=-\frac{y_2}{x_2-2}$，即证 $3y_1(ty_2+2)+y_2(ty_1+6)=0$，

即证 $4ty_1y_2+6(y_1+y_2)=0$，因为 $4ty_1y_2+6(y_1+y_2)=4t\cdot\frac{12}{t^2-4}+6\cdot\frac{-8t}{t^2-4}=0$，

所以交点 Q 在定直线 $x=1$ 上. ....12 分

解法二：（2）显然直线 l 的斜率不为 0，可设直线 l 的方程为 $x=ty+4$， ....4 分

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1,\\ x=ty+4,\end{cases}$ 得 $(t^2-4)y^2+8ty+12=0$，当 $t^2-4=0$，即 $t=\pm2$ 时，不合题意，所以 $t\neq\pm2$，

$\Delta=16t^2+192>0$，记 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=-\frac{8t}{t^2-4}$，$y_1y_2=\frac{12}{t^2-4}$， ....6 分

AM，BN 的方程分别为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

联立方程，消去 y 得 $\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，即 $(\frac{y_2}{x_2-2}-\frac{y_1}{x_1+2})x=\frac{2y_1}{x_1+2}+\frac{2y_2}{x_2-2}$，

代入 $x_1=ty_1+4$，$x_2=ty_2+4$，解得 $x=\dfrac{4ty_1y_2+12y_2+4y_1}{6y_2-2y_1}$，..................8 分

因为 $ty_1y_2=-\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$，所以 $x=\dfrac{-6(y_1+y_2)+12y_2+4y_1}{6y_2-2y_1}=\dfrac{6y_2-2y_1}{6y_2-2y_1}=1$，

所以交点 Q 在定直线 $x=1$ 上. ....12 分

22．解：

（1）$x\to -1, f(x)\to -\infty$，$f'(x)=ae^x+\dfrac{1}{x+1}$，

若 $a\ge 0$，则 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，最多只有一解，所以 $a<0$ ....2 分

令 $f'(x)=ae^x+\dfrac{1}{x+1}=0$，则 $-\dfrac{1}{a}=(x+1)e^x$，解得 $x=x_0$，当 $x\in(-1,x_0)$，$f(x)$ 递增，

当 $x\in(x_0,+\infty)$，$f(x)$ 递减，所以 x_0 为函数 $f(x)$ 唯一的极值点，

因为函数 $f(x)$ 有两个零点，所以 $f(x_0)>0$，即 $\ln(x_0+1)-\dfrac{1}{1+x_0}>0$ ....4 分

令 $g(t)=\ln(1+t)-\dfrac{1}{1+t}$，则 $g(t)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，$g(\dfrac{1}{2})<0$，$g(1)>0$，

所以 $\dfrac{1}{2}<x_0<1$ ....6 分

（2）当 $x\in(-1,0)$ 时 $f(x)<0$，所以 $0<x_1<x_2$ ....7 分

令 $F(x)=\ln(x+1)-x$，$F'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$F(x)\le F(0)=0$，

所以 $\ln(x+1)\le x$ ....9 分

令 $G(x)=e^x-(1+x+\dfrac{x^2}{2})$，$G'(x)=e^x-(x+1)$，因为 $G'(x)\ge 0$，

所以 $G(x)\ge G(0)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)\le a(1+x+\dfrac{x^2}{2})+x$ ....11 分

令 $a(1+x+\dfrac{x^2}{2})+x=0$ 两根是 x_3,x_4，所以 $x_3<x_1<x_2<x_4$，$x_4-x_3>x_2-x_1$，

因为 $x_4-x_3=2\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}-1}$，所以 $x_2-x_1<2\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}-1}$ ....12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线浙江**官方微信号：zjgkjzb。