

# 河北省“五个一”名校联盟

## 高一年级联考（2023.06）

### 数学试卷

命题单位：石家庄市第一中学

（满分：150分，测试时间：120分钟）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知向量  $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ，则下列选项中与  $\vec{a}$  共线的单位向量是

- A.  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ;    B.  $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$     C.  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$     D.  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

2. 某学校为了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取60名学生，已知该校初中部和高中部分别有400和200名学生，则正确的

- A. 高中部产生20个样本    B. 初中部产生20个样本  
C. 不同级部每个学生被抽取的可能性不相同    D. 可以从两个级部各抽取30个样本

3. 已知  $i$  为虚数单位，若复数  $z = \frac{(1+i)^2}{1-i}$ ，则下列四个选项正确的是

- A. 复数  $|z| = 2$     B. 若  $\bar{z}$  是复数  $z$  的共轭复数，则  $\bar{z} = -1 - i$   
C. 复数  $z$  的虚部为  $i$     D. 复数  $z$  在复平面内对应的点位于第一象限

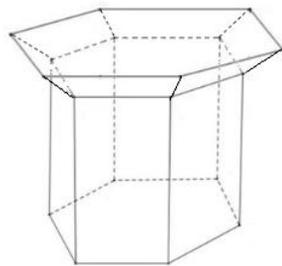
4. 已知  $\triangle ABC$  的周长为20，面积为  $10\sqrt{3}$ ， $A = 60^\circ$ ，则  $BC$  边的长为

- A. 5    B. 6    C. 7    D. 8

5. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $\vec{a} = (1, -\sqrt{3})$ ， $|\vec{b}| = 1$ ， $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，则向量  $\vec{a}$  与向量  $\vec{b}$  的夹角为

- A.  $\frac{\pi}{6}$     B.  $\frac{\pi}{4}$     C.  $\frac{\pi}{3}$     D.  $\frac{2\pi}{3}$

6. 元宵节是春节之后的第一个重要节日，元宵节又称灯节，很多地区家家户户都挂花灯。右图是小明为自家设计的一个花灯，该花灯由上面的正六棱台与下面的正六棱柱组成，正六棱台的上下两个底面边长分别为 20cm 和 40cm，正六棱台与正六棱柱的高分别为 10cm 和 60cm，则该花灯的体积约为



- A.  $46000\sqrt{3}cm^3$       B.  $48000\sqrt{3}cm^3$   
 C.  $50000\sqrt{3}cm^3$       D.  $52000\sqrt{3}cm^3$

7. 已知圆锥的顶点为  $P$ ，底面圆心为  $O$ ， $AB$  为底面直径， $\angle APB = 120^\circ$ ， $PA = 2$ ，点  $C$  在底面圆周上，且二面角  $P-AC-O$  为  $45^\circ$ ，则

- A. 该圆锥的体积为  $2\pi$       B. 该圆锥的侧面积为  $4\sqrt{3}\pi$   
 C.  $AC = 2\sqrt{2}$       D. 过圆锥任意两条母线的截面中面积最大的为  $\triangle APB$

8. 已知  $0 < x_1 < x_2 < 2\pi$ ， $\overrightarrow{OA} = (x_1, \sin x_1)$ ， $\overrightarrow{OB} = (x_2, \sin x_2)$ ，且  $\sin x_1 = \sin x_2 = \frac{1}{3}$ ，

令  $\vec{a} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ ，则  $\cos |\vec{a}| =$

- A.  $\frac{7}{9}$       B.  $-\frac{7}{9}$       C.  $\frac{\sqrt{7}}{3}$       D.  $-\frac{\sqrt{7}}{3}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 设  $z_1, z_2$  为复数，则下列命题中一定成立的是

- A. 如果  $z_1 - z_2 > 0$ ，那么  $z_1 > z_2$       B. 如果  $|z_1| = |z_2|$ ，那么  $z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2}$   
 C. 如果  $|\frac{z_1}{z_2}| > 1$ ，那么  $|z_1| > |z_2|$       D. 如果  $z_1^2 + z_2^2 = 0$ ，那么  $z_1 = z_2 = 0$

10. 小明在一次面试活动中，10 位评委给他的打分分别为：70、85、86、88、90、90、92、94、95、100。则下列说法正确的有

- A. 这 10 个分数的中位数为 90  
 B. 这 10 个分数的第 60 百分位数为 91  
 C. 这 10 个分数的平均数大于中位数  
 D. 去掉一个最低分和一个最高分后，平均分数会变大，而分数的方差会变小

11. 已知  $\omega > 0$ ，函数  $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ，下列选项正确的有

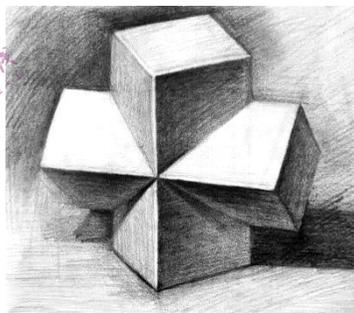
A. 若  $f(x)$  的最小正周期  $T = 2$ ，则  $\omega = \pi$

B. 当  $\omega = 2$  时，函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  后得到  $g(x) = \cos 2x$  的图象

C. 若  $f(x)$  在区间  $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$  上单调递增，则  $\omega$  的取值范围是  $[1, \frac{5}{3}]$

D. 若  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  只有一个零点，则  $\omega$  的取值范围是  $(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}]$

12. 素描是使用单一色彩表现明暗变化的一种绘画方法，素描水平反映了绘画者的空间造型能力。“十字贯穿体”是学习素描时常用的几何体实物模型，如图是某同学绘制“十字贯穿体”的素描作品。“十字贯穿体”是由两个完全相同的正四棱柱“垂直贯穿”构成的多面体，其中一个四棱柱的每一条侧棱分别垂直于另一个四棱柱的每一条侧棱，两个四棱柱分别有两条相对的侧棱交于两点，另外两条相对的侧棱交于一点(该点为所在棱的中点).若该同学绘制的“十字贯穿体”由两个底面边长为 2，高为 6 的正四棱柱构成，则 ( )

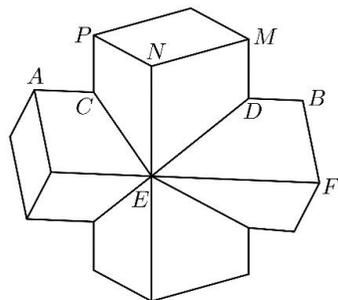


A. 一个正四棱柱的某个侧面与另一个正四棱柱的两个侧面的交线互相垂直

B. 该“十字贯穿体”的表面积是  $112 - 16\sqrt{2}$

C. 该“十字贯穿体”的体积是  $48 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$

D.  $CE$  与  $BF$  所成角的余弦值是  $\frac{\sqrt{6}}{3}$



三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把正确答案填在答题卡上。

13. 已知向量  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-3, x)$ , 若  $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ , 则  $x =$  \_\_\_\_\_.

14. 若复数  $z$  满足  $z - 1 = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $\theta$  为实数), 则  $|\bar{z}|$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

15. 已知四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PA = 4\sqrt{2}$ , 则四棱锥  $P-ABCD$  外接球表面积为 \_\_\_\_\_; 若点  $Q$  是线段  $AC$  上的动点, 则  $|PQ| + |QB|$  的最小值为 \_\_\_\_\_. (第一空 2 分, 第二空 3 分)

16. 已知三角形  $ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 若  $a^2 = b^2 + 2bc \sin A$ ,  $A$  为锐角, 则  $\tan A - 9 \tan B$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程和演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知复数  $z_1 = 4 - m^2 + (m - 2)i$ ,  $z_2 = \lambda + \sin \theta + (\cos \theta - 2)i$ , 其中  $i$  是虚数单位,

$m, \lambda, \theta \in R$ .

(I) 若  $z_1$  为纯虚数, 求  $m$  的值;

(II) 若  $z_1 = z_2$ , 求  $\lambda$  的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

为了调查疫情期间物理网课学习情况, 某校组织了高一年级学生进行了物理测试. 根据测试成绩 (总分 100 分), 将所得数据按照

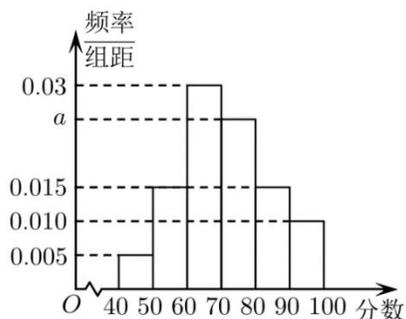
$[40, 50)$ ,  $[50, 60)$ ,  $[60, 70)$ ,  $[70, 80)$ ,  $[80, 90)$ ,

$[90, 100]$  分成 6 组, 其频率分布直方图如图所示.

(I) 求图中  $a$  的值;

(II) 试估计本次物理测试成绩的平均分; (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

(III) 该校准备对本次物理测试成绩优异 (将成绩从 **高到低** 排列, 排在前 13% 的为优异) 的学生进行嘉奖, 则受嘉奖的学生分数不低于多少?



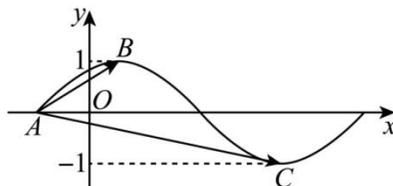
19. (本小题满分 12 分)

如图是函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象, 已知  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2$ ,

其中  $B, C$  分别为函数图象的最高和最低点.

(I) 求  $\omega$ ;

(II) 若  $f(2) - f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 求  $\varphi$ .



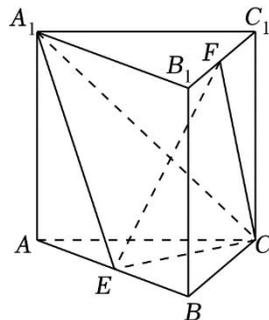
20. (本小题满分 12 分)

如图, 直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ,  $E, F$  分

别是  $AB, B_1C_1$  的中点.

(I) 证明:  $EF \perp BC$ ;

(II) 若  $AC = BC = 2$ , 直线  $EF$  与平面  $ABC$  所成的角为  $\frac{\pi}{3}$ , 求三棱锥  $B_1-A_1EC$  的体积.



21. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4\cos C$ .

(I) 求  $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$  的值;

(II) 若  $\frac{1}{\tan B} = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C}$ , 求  $\cos A$ .

22. (本小题满分 12 分)

如图 1, 在  $\triangle ABC$  中,  $D, E$  分别为  $AB, AC$  的中点,  $O$  为  $DE$  的中点,  $AB = AC = 2\sqrt{5}$ ,  $BC = 4$ , 将  $\triangle ADE$  沿  $DE$  折起到  $\triangle A_1DE$  的位置, 使得平面  $A_1DE \perp$  平面  $BCED$ ,  $F$  为  $A_1C$  的中点, 如图 2

(I) 求证:  $EF \parallel$  平面  $A_1BD$ ;

(II) 求证: 平面  $A_1OB \perp$  平面  $A_1OC$ ;

(III) 线段  $OC$  上是否存在点  $G$ , 使得  $OC \perp$  平面  $EFG$ ? 说明理由.

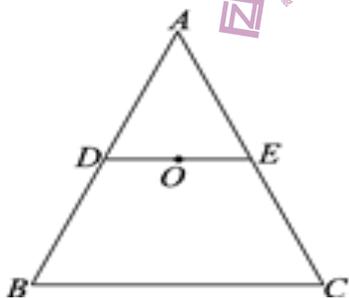


图 1

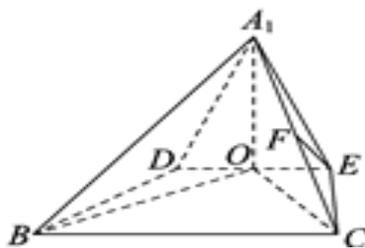


图 2