2023年高三学业质量检测（二）

理科数学

本试卷总分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1．设全集$U=\left\{x\left|x^2-x-2\le 0,x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$\complement_U M=\{-1,0\}$，则（　　）

A．$2\in M$　　B．$-1\in M$　　C．$0\in M$　　D．$1\notin M$

2．已知复数$z=2+\mathrm{i}$，且$az-\overline{z}+b=0$，其中a，b为实数，则（　　）

A．$a=-1$，$b=-4$　　B．$a=-1$，$b=4$

C．$a=1$，$b=-4$　　D．$a=1$，$b=4$

3．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2|\vec{b}|=2$，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=8$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

4．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=a_2=1$，$a_3=a_4=2$，$a_n+a_{n+4}=0$，则（　　）

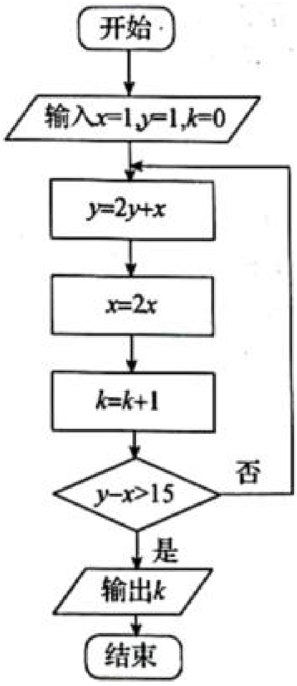
A．$S_{23}>S_{21}>S_{22}$　　B．$S_{21}>S_{22}>S_{23}$

C．$S_{21}>S_{23}>S_{22}$　　D．$S_{23}>S_{22}>S_{21}$

5．设F为抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点，准线为l，O为坐标原点，点A在C上，$|AF|=|AO|$，点A到l的距离为3，则$\triangle AOF$的面积为（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．$2\sqrt{3}$

6．执行如图所示的程序框图，输出的$k=$（　　）



A．3　　B．4　　C．5　　D．6

7．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是线段 C_1D_1（不含端点）上的动点，N 为 BC 的中点，则（　　）

A．$BD\perp AM$　　B．平面 $A_1BD\perp$ 平面 AD_1M

C．MN // 平面 A_1BD　　D．CM // 平面 A_1BD

8．在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3-a_4=16$，$a_5-a_6=4$，则使得 $a_n<1$ 成立的 n 的最小值为（　　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

9．已知球 O 的半径为 2，三棱锥 $O-ABC$ 底面上的三个顶点均在球 O 的球面上，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$BC=\sqrt{3}$，则三棱锥体积的最大值为（　　）

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10．已知某口袋中放有大小、质地完全相同的红球和白球各若干个，若有放回地从口袋中每次摸取 1 个球，连续摸两次，记两次摸到的小球颜色不同的概率为 p_1，两次摸到的小球颜色相同的概率为 p_2，则（　　）

A．$p_1\geq p_2$　　B．$p_1\leq p_2$　　C．$p_1=p_2$　　D．p_1，p_2 大小不确定

11．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，且 $f(x)+f(4-x)=0$，$f(x+1)=f(1-x)$，$f(2023)=-2023$，则 $\sum_{k=1}^{98}f(k)=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．-2023　　D．2023

12．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{F_1B}=4\overrightarrow{F_1A}$，$\triangle ABF_2$ 的周长为 $8a$，则 C 的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{33}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{33}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．从甲、乙、丙等 6 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙、丙 3 人中恰好有两人入选的概率为________.

14．圆心在直线l_1：$x-y-2=0$上，且与直线l_2：$x-y=0$相切的一个圆的方程为________.

15．已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$），若$x_1=\dfrac{\pi}{12}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$为$f\left(x\right)$的两个零点，则当$\omega$取得最小值时，$\sin 4\varphi=$________.

16．已知函数$f\left(x\right)=ax^2-\mathrm{e}^x$在区间$\left[1,3\right]$上有两个零点，则实数$a$的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

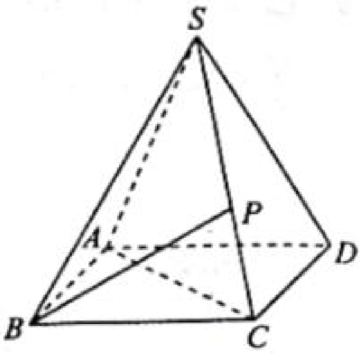
已知△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sin C\cos B-2\sin B\cos C=0$.

（1）证明：$c^2-b^2=\dfrac{1}{3}a^2$；

（2）若$a=3$，点D在BC边上，且$AD\perp BC$，$AD=\sqrt{3}$，求△ABC的周长.

18.（12 分）

如图，在四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，侧面SAD为等边三角形，$AB=2$，$SC=2\sqrt{2}$.



（1）证明：平面$SAD\perp$平面$ABCD$；

（2）侧棱SC上是否存在一点P（P不在端点处），使得直线BP与平面SAC所成角的正弦值等于$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$？若存在，求出点P的位置；若不存在，请说明理由.

19.（12 分）公众号：全元高考

某食品加工厂新研制出一种袋装食品（规格：500g/袋），下面是近六个月每袋出厂价格（单位：元）与销售量（单位：万袋）的对应关系表：

月份序号	1	2	3	4	5	6
每袋出厂价格x_i	10.5	10.9	11	11.5	12	12.5
月销售量y_i	2.2	2	1.9	1.8	1.5	1.4

并计算得$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=782.56$，$\sum\limits_{i=1}^{6}y_i^2=19.9$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=122$.

（1）计算该食品加工厂这六个月内这种袋装食品的平均每袋出厂价格、平均月销售量和平均月销售收入；

（2）求每袋出厂价格与月销售量的样本相关系数（精确到 0.01）；

（3）若样本相关系数 $|r| \geq 0.75$，则认为相关性很强；否则没有较强的相关性．你认为该食品加工厂制定的每袋食品的出厂价格与月销售量是否有较强的相关性．

附：样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\sqrt{0.322}\approx 0.57$．

20．（12 分）

已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过点 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$N\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$．

（1）求 E 的方程；

（2）已知 $P(2,0)$，是否存在过点 $G(-1,0)$ 的直线 l 交 E 于 A，B 两点，使得直线 PA，PB 的斜率之和等于 -1？若存在，求出 l 的方程；若不存在，请说明理由．

21．（12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}}{2}x^2-ax\,(a\in\mathbf{R})$．

（1）若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，求 a 的取值范围；

（2）若当 $a\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$f(x)$ 有两个极值点 m，n，证明：$\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}<\mathrm{e}-1$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=t,\\ y=2\sqrt{t}\end{cases}$（$t$ 为参数）．以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $k(\rho\cos\theta+1)-\rho\sin\theta=0\,(k\in\mathbf{R})$．

（1）写出 l 的直角坐标方程和 C 的普通方程；

（2）若 l 与 C 有两个交点，求 k 的取值范围．

23．[选修 4—5，不等式选讲]（10 分）

已知 a，b，c 均为正数，且 $a+2b+4c=1$，证明：

（1）$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2c}\geq 18$；

（2）$4a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{4}{81}$．

自主选拔在线 微信号：zizzsw