

保密★启用前

2022年菏泽市高三二模考试

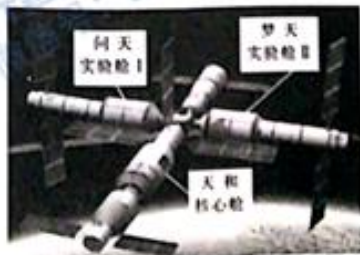
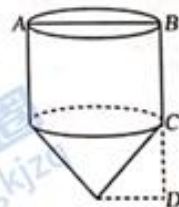
数学试题

2022.5

注意事项:

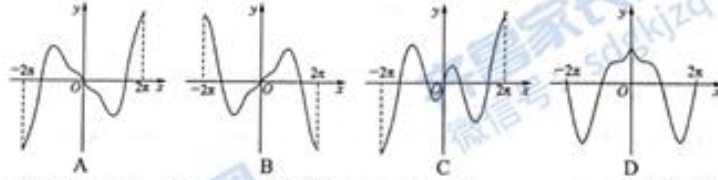
1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分,考试时间120分钟。
 2. 答题前,考生务必将姓名、考生号等个人信息填写在答题卡指定位置。
 3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
- 一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 \geq 1\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | x > -1\}$ B. $\{x | x \geq 1\}$ C. $\{x | -1 < x < 1\}$ D. $\{x | 1 \leq x < 2\}$
2. 已知复数 z 满足 $z \cdot (1+i)^2 = (1-ai)^2$ ($a \in \mathbb{R}$), 则 z 为实数的一个充分条件是
 A. $a=0$ B. $a=1$ C. $\sqrt{2}$ D. $a=2$
3. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的一条渐近线方程为 $3x + 2y = 0$, 则下列说法正确的是
 A. E 的焦点到渐近线的距离为 2 B. $m=6$
 C. E 的实轴长为 6 D. E 的离心率为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$
4. 民间娱乐健身工具陀螺起源于我国, 最早出土的石制陀螺是在山西夏县新石器时代遗址发现的。如图所示的是一个陀螺的立体结构图, 已知底面圆的直径 $AB = 16\text{cm}$, 圆柱体部分的高 $BC = 8\text{cm}$, 圆锥体部分的高 $CD = 6\text{cm}$, 则这个陀螺的表面积是
 A. $192\pi\text{cm}^2$ B. $252\pi\text{cm}^2$
 C. $272\pi\text{cm}^2$ D. $336\pi\text{cm}^2$
5. 中国空间站的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱, 假设空间站要安排甲, 乙, 丙, 丁4名航天员开展实验, 其中天和核心舱安排2人, 问天实验舱与梦天实验舱各安排1人, 则甲乙两人安排在同一个舱内的概率为
 A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$



高三数学试题 第1页 (共4页)

6. 函数 $f(x) = \frac{5\sin x}{e^{|x|}} + x \cos x$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象大致为



7. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且对任意的 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_{m+n} = a_m + a_n + 1$, 则下列选项正确的是

- A. $a_{n+1} - a_n$ 的值随 n 的变化而变化
 B. $a_5 a_6 = a_4 a_{10}$
 C. 若 $m+n=2p$, 则 $a_m + a_n = a_{2p}$
 D. $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 为递增数列

8. 直线 $y=1$ 与函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象在 y 轴右侧交点的横坐标从左到右依次为 a_1, a_2, \dots, a_n , 则下列结论正确的是

- A. $f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -2\cos 2x$
 B. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上是减函数
 C. a_1, a_2, \dots, a_n 为等差数列
 D. $a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 34\pi$

二、选择题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	q	0.4	0.1	0.2	0.2

若离散型随机变量 Y 满足: $Y = 2X + 1$, 则下列结果正确的有

- A. $q = 0.1$
 B. $E(X) = 2$
 C. $E(Y) = 5$
 D. $D(X) = 1.4$

10. 设 a, b 为两个正数, 定义 a, b 的算术平均数为 $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$, 几何平均数为 $G(a, b) = \sqrt{ab}$.

上个世纪五十年代, 美国数学家 D.H. Lehmer 提出了“Lehmer 均值”, 即

$L_p(a, b) = \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}}$, 其中 p 为有理数. 下列结论正确的有

- A. $L_{3/2}(a, b) \leq L_1(a, b)$
 B. $L_0(a, b) \leq G(a, b)$
 C. $L_2(a, b) \leq A(a, b)$
 D. $L_{n+1}(a, b) \leq L_n(a, b)$

11. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $x = m$ ($-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$) 与椭圆 E 交于 A, B 两点, C, D 分别为椭圆的左右顶点, 则下列命题正确的有

- A. 若直线 CA 的斜率为 k_1 , BD 的斜率 k_2 , 则 $k_1 k_2 = -\frac{1}{2}$
 B. 存在唯一的实数 m 使得 $\triangle AF_1 F_2$ 为等腰直角三角形
 C. $\overline{AF_1} \cdot \overline{AF_2}$ 取值范围为 $(-1, 1)$
 D. $\triangle ABF_1$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$

高三数学试题 第 2 页 (共 4 页)

12. 将边长为 2 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起, 使点 D 不在平面 ABC 内, 则在翻折过程中, 下列结论正确的有
- 存在某个位置, 使直线 BD 与平面 ABC 所成的角为 45°
 - 当二面角 $D-AC-B$ 为 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 - 当平面 $ACD \perp$ 平面 ABC 时, 异面直线 AB 与 CD 的夹角为 60°
 - O 为 AC 的中点, 当二面角 $D-AO-B$ 为 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 三棱锥 $A-OB D$ 外接球的表面积为 10π

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知圆 $x^2 + y^2 = 8$ 内有一点 $P(-1, 2)$, AB 为过点 P 且倾斜角为 135° 的弦, 则 $|AB| =$ _____.
14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$ 的解析式 _____.
- ① $f(xy) = f(x)f(y)$; ② $f(x)$ 是偶函数; ③ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.
15. 已知半径为 1 的圆 O 上有三个动点 A, B, C , 且 $|AB| = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的最小值为 _____.
16. 定义 $\lfloor x \rfloor (x \in \mathbb{R})$ 为与 x 距离最近的整数, 令函数 $G(x) = \lfloor x \rfloor$, 如: $G(\frac{4}{3}) = 1, G(2) = 2$. 则 $\frac{1}{G(1)} + \frac{1}{G(\sqrt{2})} + \frac{1}{G(\sqrt{3})} + \frac{1}{G(\sqrt{4})} =$ _____; $\frac{1}{G(1)} + \frac{1}{G(\sqrt{2})} + \dots + \frac{1}{G(\sqrt{2022})} =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = 5, b = 6$.

(1) 若 $\cos B = -\frac{4}{5}$, 求 A ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{15\sqrt{7}}{4}$, 求 c .

18. (12 分) 为了培养孩子的终身锻炼习惯, 小明与小红的父亲与他们约定周一到周日每天的锻炼时间不能比前一天少. 为了监督两人锻炼的情况, 父亲记录了他们某周内每天的锻炼时间 (单位: min), 如下表所示, 其中小明周日的锻炼时间 a 忘了记录, 但知道 $36 \leq a \leq 60, a \in \mathbb{Z}$.

	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
序号 x	1	2	3	4	5	6	7
小明的锻炼时间 y/min	16	20	20	25	30	36	a
小红的锻炼时间 z/min	16	22	25	26	32	35	35

- (1) 求这一周内小明锻炼的总时间不少于小红锻炼的总时间的概率;

- (2) 根据小明这一周前 6 天的锻炼时间, 求其锻炼时间 y 关于序号 x 的线性回归方程, 并估计小明周日锻炼时间 a 的值.

参考公式: 回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率与截距的最小二乘估计公式分别为

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

参考数据: $1 \times 16 + 2 \times 20 + 3 \times 20 + 4 \times 25 + 5 \times 30 + 6 \times 36 = 582$;

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91.$$

高三数学试题 第 3 页 (共 4 页)

19. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$, 它的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n + a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

(1) 证明: 数列 $\left\{a_n - \frac{2^n}{3}\right\}$ 为等比数列;

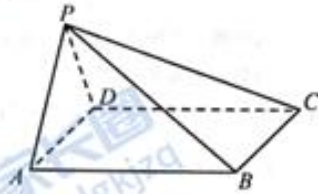
(2) 求 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{2n}$.

20. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $\angle APD = \frac{\pi}{2}$,

$PB = PC$, $\angle ABP = \angle DCP$, $\triangle PBC$ 的面积是 $\triangle PAD$ 的面积的 $\sqrt{5}$ 倍.

(1) 证明: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 E 为 BC 的中点, F 为线段 PE 上的任意一点, 当 DF 与平面 PBC 所成角的正弦值最大时, 求平面 FAD 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.

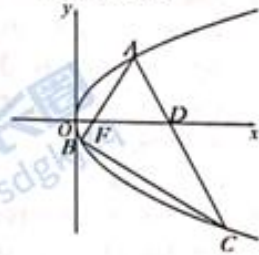


21. (12分) 已知抛物线 $E: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , O 为坐标原点, 抛物线 E 上不同的两点 M, N 只能同时满足下列三个条件中的两个:

① $|FM| + |FN| = |MN|$; ② $|OM| = |ON| = |MN| = 8\sqrt{3}$; ③ 直线 MN 的方程为 $x = 6p$.

(1) 问 M, N 两点只能满足哪两个条件 (只写出序号, 无需说明理由)? 并求出抛物线 E 的标准方程;

(2) 如图, 过 F 的直线与抛物线 E 交于 A, B 两点, 过 A 点的直线 l 与抛物线 E 的另一交点为 C , 与 x 轴的交点为 D , 且 $|FA| = |FD|$, 求三角形 ABC 面积的最小值.



22. (12分) 设函数 $f(x) = x^2 + 2x - k(x+1)\ln(x+1)$.

(1) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 k 的最大值;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 证明: $a_{2n-1} > \ln 2 + \frac{1}{4n}$.

高三数学试题 第4页 (共4页)

高三二模数学参考答案

一、二选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	D	C	A	C	D	D	ABC	AB	BD	ACD

三、填空题

13. $\sqrt{30}$

14. $f(x) = x$ 或 $f(x) = x^3$ (满足条件即可)

15. $1 - \sqrt{2}$

16. 3; $\frac{1334}{15}$

四、解答

17. 解: (1) 因为 $\cos B = -\frac{4}{5}$, 则 $B \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{3}{5}$ 1分

由正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $\frac{5}{\sin A} = 10$, 即 $\sin A = \frac{1}{2}$ 3分

因为 $a < b$, 所以 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, 因此 $A = \frac{\pi}{6}$ 4分

(2) 由 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, 得 $\sin C = \frac{2S}{ab} = \frac{2 \times \frac{15\sqrt{7}}{4}}{5 \times 6} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

$\cos C = \pm\sqrt{1 - \sin^2 C} = \pm\frac{3}{4}$ 6分

当 $\cos C = \frac{3}{4}$ 时, 由余弦定理, 得 $c^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \frac{3}{4} = 16$;8分

当 $\cos C = -\frac{3}{4}$ 时, 由余弦定理, 得 $c^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times (-\frac{3}{4}) = 106$.

所以, $c = 4$ 或 $c = \sqrt{106}$10分

18. 解: (1) 因为 $36 \leq a \leq 60$ 且 $a \in \mathbb{Z}$, 所以 a 的取值共有 25 种情况,1分

又当小明锻炼的总时间不少于小红时, 有 $\sum_{i=1}^6 y_i + a \geq \sum_{i=1}^7 z_i$, 即 $a \geq 44$3分

所以小明锻炼的总时间不少于小红时, a 的取值共有 17 情况,4分

所以这一周内小明锻炼的总时间不少于小红的概率为 $\frac{17}{25}$ 5分

(2) 由题设可知 $\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 1 \times 16 + 2 \times 20 + 3 \times 20 + 4 \times 25 + 5 \times 30 + 6 \times 36 = 582$,

$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$, $\bar{y} = \frac{16+20+20+25+30+36}{6} = \frac{49}{2}$.

所以 $\hat{b} = \frac{582 - 6 \times \frac{7}{2} \times \frac{49}{2}}{91 - 6 \times \frac{49}{4}} = \frac{27}{7}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \frac{49}{2} - \frac{27}{7} \times \frac{7}{2} = 11$9分

所以 y 关于序号 x 的线性回归方程为 $y = \frac{27}{7}x + 11$ 10分

当 $x = 7$ 时, $y = \frac{27}{7} \times 7 + 11 = 38$.

故估计小明周日锻炼时间 a 的值为 38. 12分

19. 解: (1) 由 $2S_n + a_{n+1} = 2^{n+1} - 1 (n \geq 1)$ ①, 得 $2S_{n-1} + a_n = 2^n - 1 (n \geq 2)$ ②,

由①-②, 得 $a_n + a_{n+1} = 2^n (n \geq 2)$, 1分

得 $a_{n+1} = -a_n + 2^n \Rightarrow a_{n+1} - \frac{2^{n+1}}{3} = -\left(a_n - \frac{2^n}{3}\right) (n \geq 2)$, 3分

又当 $n = 1$ 时, 由①得 $a_2 = 1 \Rightarrow a_2 - \frac{2^2}{3} = -\left(a_1 - \frac{2^1}{3}\right)$, 4分

所以对任意的 $n \in N^*$, 都有 $a_{n+1} - \frac{2^{n+1}}{3} = -\left(a_n - \frac{2^n}{3}\right)$,

故 $\left\{a_n - \frac{2^n}{3}\right\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为首项, -1 为公比的等比数列. 6分

(2) 由(1)知 $a_n - \frac{2^n}{3} = \frac{(-1)^{n-1}}{3} \Rightarrow a_n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3}$ 7分

所以 $a_{n+1} = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$, 代入①, 得 $S_n = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{2}$, 8分

所以 $S_1 + S_2 + \dots + S_{2n} = \frac{1}{3}(2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2n+1}) - \frac{1}{6}[-(-1) + (-1)^2 + \dots + (-1)^{2n}] - \frac{2n}{2}$
 $= \frac{1}{3} \left(\frac{2^2 - 2^{2n+2}}{1-2} \right) - 0 - n = \frac{2^{2n+2} - 3n + 4}{3}$ 12分

20. (1) 证明: 由 $PB = PC$, $\angle ABP = \angle DCP$, $AB = DC$, 得 $\triangle PAB \cong \triangle PDC$, 所以 $PA = PD$ 1分

取 AD 中点为 O , E 为 BC 中点, 连接 PO, OE ,

则 $PO \perp AD, OE \perp AD$, 即 $\angle POE$ 为二面角 $P-AD-E$ 的平面角, 3分

由 $PO = 1, OE = 2, PE = \sqrt{5}$, 所以 $PO^2 + OE^2 = PE^2$, 因此

$\angle POE = 90^\circ$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 5分

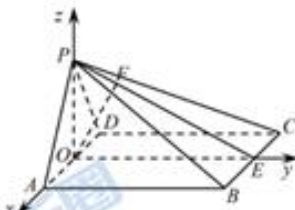
(2) 以 O 为坐标原点, OA, OE, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴,

z 轴, 建立如图的空间直角坐标系, 则 $P(0, 0, 1), B(1, 2, 0), C(-1, 2, 0), D(-1, 0, 0)$, 6分

设 $F(0, b, c)$, 则 $b = 2 - 2c$, $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0)$, $\overrightarrow{BP} = (-1, -2, 1)$, $\overrightarrow{DF} = (1, b, c)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} -2x = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$, 取 $\vec{n}_1 = (0, 1, 2)$, 8分

设 DF 与平面 PBC 所成角为 α , 则 $\overrightarrow{DF} = (1, b, c), \vec{n}_1 = (0, 1, 2)$, $\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{DF} \cdot \vec{n}_1|}{|\overrightarrow{DF}| \cdot |\vec{n}_1|} =$



$$\frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5c^2 - 8c + 5}}, \text{ 当 } c = \frac{4}{5} \text{ 时, } \sin \alpha \text{ 取得最大值. 此时 } b = \frac{2}{5}. \text{-----10分}$$

由 $AD \perp$ 平面 POE , 所以 $\angle FOE$ 为平面 FAD 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的平面角,

$$\tan \angle FOE = \frac{c}{b} = 2. \text{-----12分}$$

21. 解: (1) 同时满足的条件为②③: -----2分

由 $|OM| = |ON| = |MN|$ 知三角形 OMN 为等边三角形, 且 $MN \perp x$ 轴: 由 $x = 6p$,

$$\text{得 } y^2 = 2p \cdot 6p, \text{ 得 } y = \pm 2\sqrt{3}p, \text{ 得 } |MN| = 4\sqrt{3}p = 8\sqrt{3}, p = 2, \text{ 所以 } y^2 = 4x; \text{-----5分}$$

(2) 设 $AB: x = my + 1$, 联立 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消 x , 得 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{不妨设 } A \text{ 点在轴上方, 则 } x_1 > 0, y_1 > 0, y_1 y_2 = -4, x_1 x_2 = \frac{(y_1 y_2)^2}{16} = 1, m = \frac{x_1 - 1}{y_1},$$

$$|AB| = x_1 + x_2 + 2 = x_1 + \frac{1}{x_1} + 2, \text{-----7分}$$

由 $|FA| = |FD|$, 所以 $D(x_1 + 2, 0)$, 则 $AD: y = -\frac{y_1}{2}(x - x_1 - 2)$, 联立 $y^2 = 4x$,

$$\text{得 } C\left(4 + x_1 + \frac{4}{x_1}, -\frac{8}{y_1} - y_1\right), \quad \sqrt{1+m^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x_1 - 1}{y_1}\right)^2} = \frac{1+x_1}{y_1}.$$

$$C \text{ 到 } AB \text{ 距离 } d = \frac{\left|4 + x_1 + \frac{4}{x_1} + m\left(\frac{8}{y_1} + y_1\right) - 1\right|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{-y_1}{1+x_1} \left|4 + x_1 + \frac{4}{x_1} + \frac{x_1 - 1}{y_1} \left(\frac{8}{y_1} + y_1\right) - 1\right|$$

$$= \frac{4\sqrt{x_1}}{1+x_1} \left(2 + x_1 + \frac{1}{x_1}\right) \text{-----9分}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{1}{x_1} + 2\right) \times \frac{4\sqrt{x_1}}{1+x_1} \left(2 + x_1 + \frac{1}{x_1}\right) = \frac{2\sqrt{x_1}}{1+x_1} \left(2 + x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_1}} \left(\sqrt{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^4 = 2 \left(\sqrt{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^4 \geq 16.$$

当且仅当 $x_1 = 1$ 时, 面积取到最小值 16. -----12分

22. 解: (1) $f(x) = 2(x+1) - k(1 + \ln(x+1))$, -----1分

① 当 $k \leq 2$ 时, 由 $x \geq 0$, 得 $f'(x) = 2(x+1) - k(1 + \ln(x+1)) \geq 2(x - \ln(x+1)) \geq 0$,

所以 $f(x)$ 单调递增, 又 $f(0) = 0$, 因此 $f(x) \geq 0$ 恒成立: -----3分

②当 $k > 2$ 时, 令 $g(x) = f'(x) = 2(x+1) - k(1 + \ln(x+1))$, 则

$$g'(x) = 2 - \frac{k}{x+1} = \frac{2x - (k-2)}{x+1}, \text{ 当 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{k-2}{2} > 0.$$

所以在 $(0, \frac{k-2}{2})$ 上, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 又 $g(0) = 2 - k < 0$, 所以 $g(x) < 0$.

即 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减, 又 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) < 0$, 不满足要求.

综上, $k \leq 2$5分

$$(2) \text{ 由 } a_{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}, \text{7分}$$

$$\text{要证 } a_{2n-1} > \ln 2 + \frac{1}{4n}, \text{ 即证 } \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \ln 2 + \frac{1}{4n}.$$

$$\text{即证明: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} > \ln 2. \text{8分}$$

$$\text{由 (1) } f(x) = x^2 + 2x - 2(x+1)\ln(x+1) \geq 0, \text{ 即 } \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x+1}\right),$$

$$\text{取 } x = \frac{1}{k} \text{ (} k \in \mathbb{N}^* \text{), 得 } \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right), \text{ 所以 } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right), \dots, \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)$$

$$\text{累加得: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} > \ln 2, \text{ 所以 } a_{2n-1} > \ln 2 + \frac{1}{4n}. \text{12分}$$

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索