

# 2021-2022 学年度第一学期期末联考

## 高二数学参考答案

一、单项选择题:每小题 5 分,共 40 分.

1. D; 2. C; 3. A; 4. B; 5. A; 6. B; 7. C; 8. A

二、多项选择题:每小题 5 分,漏选得 2 分,错选得 0 分,共 20 分.

9. BC; 10. AD; 11. BCD; 12. BCD

三、填空题:每小题 5 分,共 20 分.

13.  $(x-5)^2 + (x-6)^2 = 10$ ; 14.  $-\frac{\pi}{2}$ ; 15.  $a_n = \frac{2}{2n-1}$ ; 16.  $\sqrt{5}$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

解:(1) 由题意知圆心的坐标为  $C(1,2)$ , 半径  $r=2$ ,

当过点  $M$  的直线的斜率不存在时, 方程为  $x=3$ .

由圆心  $C(1,2)$  到直线  $x=3$  的距离  $3-1=2=r$  知, 此时, 直线与圆相切. ....2 分

当过点  $M$  的直线的斜率存在时, 设方程为  $y-5=k(x-3)$ ,

即  $kx-y+5-3k=0$ . 由题意知  $\frac{|k-2+5-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$ ,

解得  $k=\frac{5}{12}$ ,  $\therefore$  方程为  $5x-12y+45=0$ .

故过点  $M$  的圆  $C$  的切线方程为  $x=3$  或  $5x-12y+45=0$ . ....5 分

(2)  $\because$  圆心  $C(1,2)$ ,  $N(2,1)$ , 即  $k_{NC}=\frac{1-2}{2-1}=-1$ , 而  $k_{NC} \cdot k_{AB}=-1$

$\therefore k_{AB}=1$ , 则  $AB: x-y-1=0$ . ....10 分

18. (本小题满分 12 分)

解:(1) 设  $\{b_n\}$  公比为  $q$ , 则  $q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{9}{3}=3$

$\therefore b_1=\frac{b_2}{q}=\frac{3}{3}=1 \therefore b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$  ....3 分

设  $\{a_n\}$  公差为  $d$ , 由  $a_{14} = b_4$ ,  $a_1 = b_1 = 1 \therefore a_1 + 13d = 3^3 \therefore d = 2$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 由 (1) 知  $c_n = a_n + b_n = 2n-1+3^{n-1}$

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = [1+3+\dots+(2n-1)] + (1+3+3^2+\dots+3^{n-1}) \\ &= \frac{n(1+2n-1)}{2} + \frac{1-3^n}{1-3} = n^2 + \frac{3^n-1}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

**19. (本小题满分 12 分)**

(1) 解: 定义域  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{a-x}{x^2}$  \dots\dots\dots 1 分

①  $a \leq 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单减; \dots\dots\dots 3 分

②  $a > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, a)$  上单增,  $(a, +\infty)$  单减; \dots\dots\dots 5 分

(2) 解: 由 (1) 知:

①  $a \leq \frac{1}{e}$  时,  $f(x)$  在  $[\frac{1}{e}, e]$  单减,  $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{e}) = 2 - ea$ ; \dots\dots\dots 7 分

②  $a \geq e$  时,  $f(x)$  在  $[\frac{1}{e}, e]$  单增,  $f(x)_{\max} = f(e) = -\frac{a}{e}$ ; \dots\dots\dots 9 分

③  $\frac{1}{e} < a < e$  时,  $f(x)$  在  $[\frac{1}{e}, a]$  单增,  $(a, e]$  单减,  $f(x)_{\max} = f(a) = -\ln a$ ; \dots\dots\dots 11 分

$$\text{综上: } f(x)_{\max} = \begin{cases} -\frac{a}{e}, & a \geq e \\ -\ln a, & \frac{1}{e} < a < e \\ 2 - ea, & a \leq \frac{1}{e} \end{cases} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

**20. (本小题满分 12 分)**

解: (1) 由椭圆的定义可得  $2a = 4$ , 所以  $a = 2$ , \dots\dots\dots 2 分

又因为点  $(1, \frac{3}{2})$  在椭圆  $C$  上, 所以  $\frac{1}{4} + \frac{9}{4b^2} = 1$ , 解得:  $b^2 = 3$ ,

所以  $a$  的值为 2, 椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . .....6 分

(2) 由椭圆的方程可得  $A(-2,0)$ ,  $B(0,\sqrt{3})$ ,  $F_2(1,0)$ ,

$$\text{所以 } k_{PQ} = k_{AB} = \frac{\sqrt{3}-0}{0-(-2)} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以直线  $PQ$  的方程为  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-1)$ ,

设  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ , 由  $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$  可得  $8y^2 + 4\sqrt{3}y - 9 = 0$ , .....10 分

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_1 y_2 = -\frac{9}{8},$$

$$\text{所以 } |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\frac{3}{4} - 4 \times \left(-\frac{9}{8}\right)} = \frac{\sqrt{21}}{2},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle F_1 P Q} = S_{\triangle F_1 F_2 P} + S_{\triangle F_1 F_2 Q} = \frac{1}{2} |F_1 F_2| \times |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}. \quad \text{.....12 分}$$

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 设每小时的燃料费为  $y_1$ , 则  $y_1 = kv^2$

当  $v = 12 \text{ km/h}$ , 每小时的燃料费为 720 元,

$$\text{代入得 } k = \frac{720}{12^2} = 5$$

(2) 由 (1) 得  $y_1 = 5v^2$ . 设全程燃料费为  $y$ ,

$$\text{则 } y = 5v^2 \times \frac{200}{v-8} = \frac{1000v^2}{v-8} \quad (8 < v \leq 20), \quad \text{.....4 分}$$

$$\text{所以 } y' = \frac{1000v^2 - 16000v}{(v-8)^2}. \quad \text{.....6 分}$$

令  $y' = 0$ , 解得  $v = 0$  (舍去) 或  $v = 16$ ,

所以当  $v \in (8, 16)$  时,  $y' < 0$ ; 当  $v \in (16, 20]$  时,  $y' > 0$ ,

所以当  $v=16$  时,  $y$  取得最小值, .....8 分

故为了使全程燃料最省, 船的实际前进速度应为  $8 \text{ km/h}$ . .....9 分

(3) 由 (2) 得,

若  $x \leq 16$  时, 则  $y$  在区间  $(8, x]$  上单调递减,

当  $v=x$  时,  $y$  取得最小值;

若  $x > 16$  时, 则  $y$  在区间  $(8, 16)$  上单调递减, 在区间  $[16, x]$  上单调递增,

当  $v=16$  时,  $y$  取得最小值;

综上, 当  $x > 16$  时, 船的实际前进速度为  $8 \text{ km/h}$ , 全程燃料费最省;

当  $x \leq 16$  时, 船的实际前进速度应为  $(x-8) \text{ km/h}$ , 全程燃料费最省. ....12 分

## 22. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 由  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  两边同时加 1,

可得  $a_{n+1} + 1 = 2a_n + 1 + 1 = 2(a_n + 1)$ ,

$\therefore a_1 + 1 = 0 + 1 = 1 \neq 0$ ,  $\therefore a_n + 1 \neq 0$

$\therefore \frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 2$   $\therefore$  数列  $\{a_n + 1\}$  是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列,

$\therefore a_n + 1 = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$ , 故  $a_n = 2^{n-1} - 1$ , .....4 分

(2) 由 (1) 知:  $a_n = 2^{n-1} - 1$ , 所以  $b_n = \log_2 2^{n-1} = n-1$ , 所以  $c_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, n \geq 2 \end{cases}$

当  $n=1$  时,  $S_1 = c_1 = 1$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $S_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

因为  $S_1 = 1$  满足  $S_n = 2 - \frac{1}{n} (n \geq 2)$ , 所以  $S_n = 2 - \frac{1}{n}$  .....8 分

(3)  $D_n = 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$ ,  $5D_2$ 、 $D_q$ 、 $D_r$  这三项经适当排序后能构成等差数列,

①若  $2 \times 5D_2 = D_q + D_r$ , 则  $10 \times 2^{2-1} = 2^{q-1} + 2^{r-1}$ ,  $\therefore 2^{q-2-1} + 2^{r-2-1} = 5$ ,

又  $q < r$ ,  $\therefore \begin{cases} 2^{q-2-1} = 1 \\ 2^{r-2-1} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2+1=3 \\ r = 2+3=5 \end{cases}$ ,  $\therefore (q,r) = (3,5)$ ;

②若  $2D_q = 5D_2 + D_r$ , 则  $2 \times 2^{q-1} = 5 \times 2^{2-1} + 2^{r-1}$ ,  $\therefore 2^{q+1-2} - 2^{r-2} = 5$ ,

左边为偶数, 右边为奇数,  $\therefore$  不成立;

③若  $2D_r = 5D_2 + D_q$ , 同理也不成立.

综合①②③得,  $(q,r) = (3,5)$ . .....12分

