2022～2023学年高三押题信息卷

文科数学(四)

注意事项：

1. 本卷满分150分，考试时间120分钟。答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{-1,0,1,2,3\}$，$N=\{x|x^2-1=0\}$，则下列结论正确的是

A. $M\subseteq N$　　B. $M\cap N=\{-1\}$

C. $M\cup N=M$　　D. $\complement_M N=\{-1,0,2,3\}$

2. 已知在复平面内复数 z 对应点的坐标为 $(2,-1)$，则 $\left|\frac{1+3i}{z}\right|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 8

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,\lambda)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$

A. 50　　B. $5\sqrt{2}$　　C. 245　　D. $7\sqrt{5}$

4. 12月4日20时09分，神舟十四号载人飞船返回舱在东风着陆场成功着陆，神舟十四号载人飞行任务取得圆满成功. 经历了120天全生命周期的水稻和拟南芥种子，也一起搭乘飞船返回舱从太空归来. 我国在国际上首次完成水稻“从种子到种子”全生命周期空间培养实验，在此之前国际上在空间只完成了拟南芥、油菜、豌豆和小麦“从种子到种子”的培养. 若从水稻、拟南芥、油菜、小麦和豌豆这5种种子中随机选取3种，则小麦种子被选中的概率为

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{5}$

5. 木桶作为一种容器，在我国使用的历史已经达到了几千年，其形状可视为一个圆台. 若某圆台形木桶上、下底面的半径分别为20 cm，13 cm，母线长为25 cm，木板厚度忽略不计，则该木桶的容积为

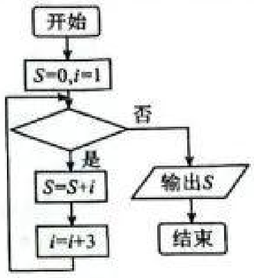
A. $\frac{14\ 225\pi}{3}\ \text{cm}^3$　　B. $4\ 552\pi\ \text{cm}^3$

C. $\frac{20\ 725\pi}{3}\ \text{cm}^3$　　D. $6\ 632\pi\ \text{cm}^3$

6. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，若$A=60^\circ$，$c=2$，$\frac{2b+c}{2\sin B+\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则$\triangle ABC$的面积为

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 1

7. 在如图所示的计算$1+4+7+\cdots+2023$的程序框图中，判断框内应填入的条件是



A. $i\leqslant 2\ 023$?　　B. $i<2\ 023$?　　C. $i\leqslant 2\ 022$?　　D. $i<2\ 022$?

8. 在平面直角坐标系xOy中，抛物线$C:y^2=8x$，P为x轴正半轴上一点，线段OP的垂直平分线l交C于A,B两点，若$\angle OAP=120^\circ$，则四边形$OAPB$的周长为

A. 80　　B. 64　　C. $80\sqrt{3}$　　D. $64\sqrt{3}$

9. 已知函数$f(x)=\cos x+\cos 2x$，则下列说法正确的有

A. 函数$f(x)$的最小正周期为π

B. 函数$f(x)$的最小值为-2

C. 函数$f(x)$的最大值为2

D. 函数$f(x)$在$(0,2\pi)$上恰有两个极值点

10. 已知函数$f(x)=x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，若$f(2a-1)>f(3a+2)$，则$a$的取值范围为

A. $(-\infty,-3)$

B. $(-3,+\infty)$

C. $\left(-3,-\frac{1}{5}\right)$

D. $(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{1}{5},+\infty\right)$

11. 已知点$A(0,-4)$，点$B(2,0)$，P为圆$O:x^2+y^2=4$上一动点，则$\frac{|PB|}{|PA|}$的最大值是

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

12. 若$a=e^{0.01}-1$，$b=\ln 1.01$，$c=\tan 0.01$，则a,b,c的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x-y-3\leqslant 0,\\x+y-4\geqslant 0,\\y\geqslant 1,\end{cases}$则$z=3x-4y$的最大值为________.

14. 已知$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=$________.

15. 在三棱锥$P-ABC$中，$PA=AB=3$，$PB=PC=CB=3\sqrt{2}$，$AC=3\sqrt{3}$，则三棱锥$P-ABC$外接球的表面积是________.

16. 在平面直角坐标系xOy中，双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别是$F_1,F_2$，过$F_1$的直线$l$与$C$的左、右两支分别交于$A,B$两点，点$T$在$x$轴上，满足$\overrightarrow{BT}=4\overrightarrow{AF_2}$，且$BF_2$经过$\triangle BF_1T$的内切圆圆心，则$C$的离心率为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

近年来，国民经济的增长和社会结构的变化推动宠物饲养成为很多人精神消费的主要方式，使得近几年中国宠物市场规模逐年增长，下表为 2018 至 2022 年某地区宠物市场规模 y（单位：亿元）.

年份	2018	2019	2020	2021	2022
年份代码 x	1	2	3	4	5
宠物市场规模 y/亿元	1.62	1.74	2.18	2.61	3.35

（1）根据上表统计数据，计算 y 与 x 的相关系数 r，并判断 y 与 x 是否具有较高的线性相关程度；（若 $|r|<0.75$，则线性相关程度一般，若 $|r|\geqslant 0.75$，则线性相关程度较高，r 精确到 0.01）

（2）求 y 关于 x 的线性回归方程，并预测 2024 年该地区宠物市场规模.

参考数据：$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}\approx 1.41$，$\sqrt{10}\approx 3.162$.

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，现给出下列三个条件：①$3a_2+a_4=64$；②$S_5=100$；③$S_7=5a_5+16$. 请你从这三个条件中任选两个解答下列问题.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=3$，$b_n-b_{n-1}=a_n(n\geqslant 2)$，设数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$\dfrac{1}{3}\leqslant T_n<\dfrac{1}{2}$.

注：如果选择多个条件分别进行解答，按第一个解答进行计分.

19.（本小题满分 12 分）

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$AC=2$，$AB=2\sqrt{3}$，D，E 分别是 AC，BC 边上的点（不包含端点），且 $DE /\!/ AB$. 将 $\triangle CDE$ 沿 DE 折起，使得点 C 到达点 P 的位置，得到如图 2 所示的四棱锥 $P-ABED$.

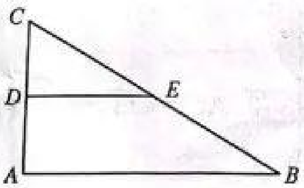


图 1

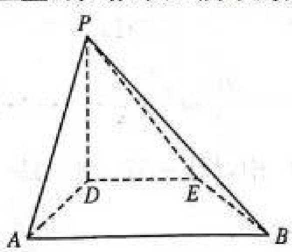


图 2

（1）若 D 为 AC 的中点，平面 $PDE\perp$ 平面 $ABED$，求四棱锥 $P-ABED$ 的体积；

（2）设平面 $ABP\cap$ 平面 $DEP=l$，求证：$l\perp PA$.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)求 C 的方程；

(2)不过原点 O 的直线 l 与 C 交于不同的 P,Q 两点，且直线 OP,PQ,OQ 的斜率成等比数列. 在 C 上是否存在一点 M，使得四边形 $OPMQ$ 为平行四边形？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2\ln x-x^3+ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=1$，求 $f(x)$ 的极值；

(2)若 $f(x)$ 恰有两个零点 x_1,x_2，证明：$x_1x_2<1$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=t-\frac{3}{t},\\ y=t+\frac{3}{t}\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{2\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$.

(1)求 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

(2)若点 P 是 C 上的一点，求点 P 到直线 l 的距离的最小值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-1|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant -2$ 的解集；

(2)若不等式 $f(x)\leqslant x+3a^2-2a$ 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

2022～2023 学年高三押题信息卷

文科数学(四)参考答案

1. C　由题得 $N=\{x\mid x^2-1=0\}=\{-1,1\}$，又 $M=\{-1,0,1,2,3\}$，所以 $N\subseteq M$，故 A 错误；$M\cap N=\{-1,1\}$，故 B 错误；$M\cup N=M$，故 C 正确；$\complement_M N=\{0,2,3\}$，故 D 错误. 故选 C.

2. A　因为复数 z 对应点的坐标为 $(2,-1)$，所以 $z=2-i$，所以 $\frac{1+3i}{z}=\frac{1+3i}{2-i}=\frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$，所以 $\left|\frac{1+3i}{z}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\sqrt{2}$. 故选 A.

3. B　因为 $a\perp b$，所以 $a\cdot b=1\times2+(-2)\lambda=0$，解得 $\lambda=1$，所以 $a+3b=(1,-2)+3(2,1)=(7,1)$，所以 $|a+3b|=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$. 故选 B.

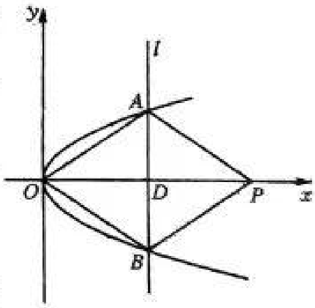
4. D　设水稻、拟南芥、油菜、小麦和豌豆分别为 a,b,c,d,e，这 5 种种子中随机选取 3 种有 $(a,b,c),(a,b,d),(a,b,e),(a,c,d),(a,c,e),(a,d,e),(b,c,d),(b,c,e),(b,d,e),(c,d,e)$，共 10 种情况，满足条件的有 $(a,b,d),(a,c,d),(a,d,e),(b,c,d),(b,d,e),(c,d,e)$，共 6 种情况，所以小麦种子被选中的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. 故选 D.

5. D　由题意可知，圆台形木桶的高为 $\sqrt{25^2-(20-13)^2}=24(\mathrm{cm})$，所以该木桶的容积为 $\frac{1}{3}\pi\times24\times(20^2+13^2+20\times13)=6\ 632\pi(\mathrm{cm}^3)$. 故选 D.

6. B　在△ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{2b+c}{2\sin B+\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin 60^\circ=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2$，又 $c=2$，所以△ABC 是正三角形，所以△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=\sqrt{3}$. 故选 B.

7. A　由题意结合流程图可知当 $i=2\ 023$ 时，程序应执行 $S=S+i$，$i=i+3=2\ 026$，再次进入判断框时应该跳出循环，输出 S 的值；结合所给的选项可知判断框内应填入的条件是 $i\leqslant2\ 023$?. 故选 A.

8. D　设 l 与 x 轴的交点为 D，设 $D(t,0)$，$t>0$，由题意知四边形 $OAPB$ 是菱形，且∠$OAP=120^\circ$，所以∠$AOD=30^\circ$，所以 $|AD|=\frac{\sqrt{3}}{3}t$，不妨设 $A\left(t,\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)$，则 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2=8t$，解得 $t=24$，所以 $|OA|=\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}t=16\sqrt{3}$，所以四边形 $OAPB$ 的周长为 $16\sqrt{3}\times4=64\sqrt{3}$. 故选 D.



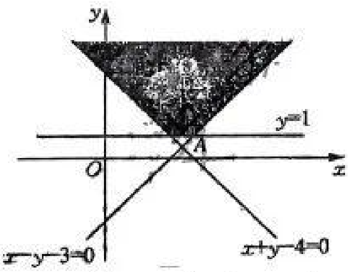
9. C　因为 $f(0)=2$，$f(\pi)=0$，所以 $f(0)\neq f(\pi)$，所以 π 不是函数 $f(x)$ 的周期，故 A 错误；$f(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2x+\cos x-1=2\left(\cos x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$，所以当 $\cos x=-\frac{1}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值 $-\frac{9}{8}$，故 B 错误；当 $\cos x=1$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值 2，故 C 正确；当 $x\in(0,2\pi)$，$f'(x)=-\sin x(1+4\cos x)$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pi$ 或 $\cos x=-\frac{1}{4}$，记 $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$ 在 $(0,2\pi)$ 上的两个实数根为 x_1,x_2，则 $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$x_2\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，所以当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_1,\pi)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(\pi,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_2,2\pi)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 $x=\pi$ 处取得极大值，在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处取得极小值，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上有三个极值点，故 D 错误. 故选 C.

10. C　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)=-x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=x\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=x\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，所以 $f(-x)=(-x)\ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x)=-x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=x\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，易得函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 由 $f(2a-1)>f(3a+2)$，得 $|2a-1|>|3a+2|$，解得 $-3<a<-\frac{1}{5}$，所以 a 的取值范围为 $\left(-3,-\frac{1}{5}\right)$. 故选 C.

11. A　设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2=4$，所以 $|PA|^2=x_0^2+(y_0+4)^2=20+8y_0$，$|PB|^2=(x_0-2)^2+y_0^2=8-4x_0$，所以 $\dfrac{|PB|^2}{|PA|^2}=\dfrac{8-4x_0}{20+8y_0}=\dfrac{2-x_0}{5+2y_0}$，令 $\dfrac{2-x_0}{5+2y_0}=m$，则 $x_0+2my_0+5m-2=0$，所以圆 $O:x^2+y^2=4$ 与直线 $x+2my+5m-2=0$ 有公共点，所以 $\dfrac{|5m-2|}{\sqrt{1+4m^2}}\leqslant 2$，即 $9m^2-20m\leqslant 0$，解得 $0\leqslant m\leqslant\frac{20}{9}$，所以 $\dfrac{|PB|^2}{|PA|^2}\in\left[0,\frac{20}{9}\right]$，所以 $\dfrac{|PB|}{|PA|}\leqslant\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，即 $\dfrac{|PB|}{|PA|}$ 的最大值是 $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. 故选 A.

12. B　令 $f(x)=e^x-1-\tan x=\dfrac{e^x\cos x-\cos x-\sin x}{\cos x}$，$0<x<\frac{\pi}{4}$，令 $g(x)=e^x\cos x-\cos x-\sin x$，所以 $g'(x)=(-\sin x+\cos x)e^x+\sin x-\cos x=(e^x-1)(\cos x-\sin x)$，当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，又 $g(0)=1-1=0$，所以 $g(x)>0$. 又 $\cos x>0$，所以 $f(x)>0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上恒成立，所以 $f(0.01)>f(0)=0$，即 $a>c$. 令 $h(x)=\ln x-x+1$，所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$. 令 $h'(x)<0$，解得 $x>1$，令 $h'(x)>0$，解得 $0<x<1$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(1.01)<h(1)=0$，即 $\ln 1.01<0.01$. 令 $m(x)=x-\tan x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $m'(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}<0$，所以 $m(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $m(0.01)<m(0)=0$，即 $0.01<\tan 0.01$，所以 $b<0.01<c$，即 $b<c$，所以 $b<c<a$. 故选 B.

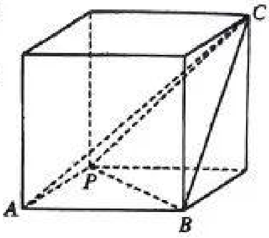
13. 8　实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-3\leqslant 0,\\ x+y-4\geqslant 0,\\ y\geqslant 1\end{cases}$ 表示的可行域如图阴影部分所示，



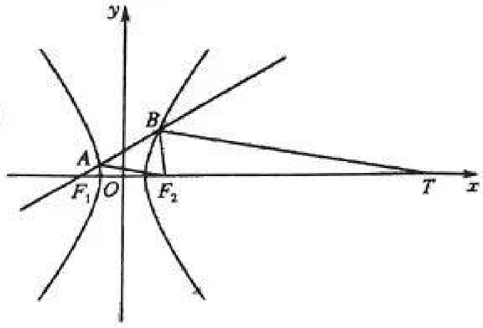
当直线 $z=3x-4y$ 经过点 A 时，z 取得最大值. 由 $\begin{cases}x-y-3=0,\\ y=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=1,\end{cases}$ 即 $A(4,1)$，所以 $z_{\max}=3\times 4-4\times 1=8$.

14. $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6}$　因为 $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1$，又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$ 或 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2}{3}$. 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6}$.

15. 27π　如图，将三棱锥 $P-ABC$ 补形为棱长为 3 的正方体，则三棱锥外接球与正方体外接球相同，则外接球直径为正方体体对角线，则外接球半径 $R=\frac{\sqrt{3^2+3^2+3^2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则外接球表面积 $S=4\pi R^2=27\pi$.来源：高三答案公众号



16. $\frac{\sqrt{33}}{3}$　因为 $\overrightarrow{BT}=4\overrightarrow{AF_2}$，所以 $AF_2 /\!/ BT$，$|BT|=4|AF_2|$，所以 $\angle AF_2B=\angle TBF_2$，$|AB|=3|AF_1|$，因为 BF_2 经过 $\triangle BF_1T$ 内切圆圆心，所以 BF_2 为 $\angle F_1BT$ 的角平分线，所以 $\angle F_1BF_2=\angle TBF_2$，所以 $\angle ABF_2=\angle BF_2A$，所以 $|AB|=|AF_2|$，又 $2a=|AF_2|-|AF_1|=|AB|-|AF_1|=3|AF_1|-|AF_1|=2|AF_1|$，所以 $|AF_1|=a$，$|AF_2|=3a$，又 $2a=|BF_1|-|BF_2|=4a-|BF_2|$，所以 $|BF_2|=2a$，在 $\triangle ABF_2$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABF_2=\frac{|AB|^2+|BF_2|^2-|AF_2|^2}{2|AB|\cdot|BF_2|}=\frac{(3a)^2+(2a)^2-(3a)^2}{2\times3a\times2a}=\frac{1}{3}$.



在 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABF_2=\frac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1|\cdot|BF_2|}=\frac{(4a)^2+(2a)^2-(2c)^2}{2\times4a\times2a}=\frac{1}{3}$，得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{33}}{3}$，即 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{33}}{3}$.

17. 解：(1)由题意知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{1.62+1.74+2.18+2.61+3.35}{5}=2.3$，

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2=10$，

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(1-3)\times(1.62-2.3)+(2-3)\times(1.74-2.3)+(3-3)\times(2.18-2.3)+(4-3)\times(2.61-2.3)+(5-3)\times(3.35-2.3)=4.33$，……3 分

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}\approx\frac{4.33}{3.162\times1.41}\approx0.97$，所以 $|r|>0.75$，

所以 y 与 x 具有较高的线性相关程度. ……6 分

(2) $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{4.33}{10}=0.433$，……8 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=2.3-0.433\times3=1.001$，……9 分

所以 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=0.433x+1.001$，……10 分

2024 年对应的年份代码为 7，代入 $\hat{y}=0.433x+1.001$，

得 $\hat{y}=0.433\times7+1.001=4.032$，所以预测 2024 年该地区宠物市场规模为 4.032 亿元. ……12 分

18. (1)解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由条件①得，$3a_2+a_4=3(a_1+d)+a_1+3d=4a_1+6d=64$，即 $2a_1+3d=32$.

由条件②得，$S_5=5a_1+\frac{5\times(5-1)d}{2}=5a_1+10d=100$，即 $a_1+2d=20$.

由条件③得，$S_7=5a_5+16$，可得 $7a_1+21d=5(a_1+4d)+16$，即 $2a_1+d=16$.

若选①②，则 $\begin{cases}2a_1+3d=32,\\a_1+2d=20,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\d=8,\end{cases}$ 所以 $a_n=4+8(n-1)=8n-4$；……5 分

若选①③，则 $\begin{cases}2a_1+3d=32,\\2a_1+d=16,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\d=8,\end{cases}$ 则 $a_n=4+8(n-1)=8n-4$；……5 分

若选②③，则$\begin{cases}a_1+2d=20,\\2a_1+d=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=4,\\d=8,\end{cases}$则 $a_n=4+8(n-1)=8n-4$；…………5分

(2)证明：由 $b_n-b_{n-1}=a_n=8n-4(n\geqslant2)$，且 $b_1=3$，来源：高三答案公众号

当 $n\geqslant2$ 时，则 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=3+12+20+\cdots+(8n-4)=3+\frac{(8n-4+12)(n-1)}{2}=4n^2-1$，…………7分

又 $b_1=3$ 也满足 $b_n=4n^2-1$，故对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $b_n=4n^2-1$. …………8分

则$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，…………10分

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$，

由于 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$是单调递增，所以 $T_n\geqslant T_1=\frac{1}{3}$.

综上，$\frac{1}{3}\leqslant T_n<\frac{1}{2}$. …………12分

19. (1)解：由题意得 $DE\perp DP$，又平面 $PDE\perp$平面 $ABED$，$PD\subset$平面 PDE，平面 $PDE\cap$平面 $ABED=DE$，

所以 $PD\perp$平面 $ABED$. …………3分

因为 D 为 AC 的中点，$DE\parallel AB$，所以 $DA=1$，$DE=\sqrt{3}$，$DP=1$，

所以 $V_{P-ABED}=\frac{1}{3}S_{ABED}\cdot DP=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}\times1\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即四棱锥 $P-ABED$ 的体积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………6分

(2)证明：因为 $DE\parallel AB$，$DE\not\subset$平面 PAB，$AB\subset$平面 PAB，所以 $DE\parallel$平面 PAB.

又 $DE\subset$平面 PDE，平面 $PDE\cap$平面 $PAB=l$，所以 $DE\parallel l$. …………9分

由题意得 $DE\perp DA$，$DE\perp DP$，所以 $l\perp DA$，$l\perp DP$.

又 $DA\cap DP=D$，DA，$DP\subset$平面 ADP，所以 $l\perp$平面 ADP，

…………11分

又 $PA\subset$平面 ADP，所以 $l\perp PA$. …………12分

20. 解：(1)由题意知$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{1}{2}}{b^2}=1,\\\frac{\frac{1}{2}}{a^2}+\frac{\frac{3}{4}}{b^2}=1,\end{cases}$ …………2分

解得$\begin{cases}a=\sqrt{2},\\b=1,\end{cases}$ …………3分

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………4分

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq0,m\neq0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

因为直线 OP，PQ，OQ 的斜率成等比数列，所以 $k^2=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}$. …………5分

由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\y=kx+m,\end{cases}$得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

所以 $\Delta=16k^2m^2-8(m^2-1)(2k^2+1)=8(2k^2-m^2+1)>0$，

$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}, x_1x_2=\frac{2(m^2-1)}{2k^2+1}$, ………………………………………………………… 7分

所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{m^2-2k^2}{2k^2+1}$,

所以$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{m^2-2k^2}{2(m^2-1)}=k^2$,得 $k^2=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………… 9分

存在点 M,使得四边形 $OPMQ$ 为平行四边形. 理由如下:

因为四边形 $OPMQ$ 为平行四边形,则点 $M(x_1+x_2,y_1+y_2)$,

又点 M 在 C 上,则$\frac{(x_1+x_2)^2}{2}+(y_1+y_2)^2=1$,

因为$(x_1+x_2)^2=\frac{16k^2m^2}{(2k^2+1)^2}=2m^2$,来源:高三答案公众号

$(y_1+y_2)^2=[k(x_1+x_2)+2m]^2=k^2(x_1+x_2)^2+4km(x_1+x_2)+4m^2=m^2$,

所以 $m^2+m^2=1$,即 $m^2=\frac{1}{2}$, ………………………………………………………… 10分

当 $k^2=\frac{1}{2}, m^2=\frac{1}{2}$时,满足 $\Delta=8(2k^2-m^2+1)>0$,

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$或 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$或 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$或 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$. ……………………… 12分

21. (1)解:若 $a=1$,则 $f(x)=2\ln x-x^3+x$,

所以 $f'(x)=\frac{2}{x}-3x^2+1=-\frac{3x^3-x-2}{x}=-\frac{3x(x-1)(x+1)+2(x-1)}{x}=-\frac{(3x^2+3x+2)(x-1)}{x}$, ……… 2分

令 $f'(x)=0$,解得 $x=1$,令 $f'(x)>0$,解得 $0<x<1$,令 $f'(x)<0$,解得 $x>1$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,又 $f(1)=0$,所以 $f(x)$ 的极大值为 0,无极小值. ……………………………………… 4分

(2)证明:$f(x)$ 恰有两个零点 x_1,x_2,即 $x^2-\frac{2\ln x}{x}-a=0$ 有两个不同的实数解 x_1,x_2.

令 $u(x)=x^2-\frac{2\ln x}{x}-a$,所以 $u'(x)=2x-\frac{2(1-\ln x)}{x^2}=\frac{2(x^3+\ln x-1)}{x^2}$,

令 $r(x)=x^3+\ln x-1$,则 $r'(x)=3x^2+\frac{1}{x}>0$,所以 $r(x)=x^3+\ln x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $r(1)=0$,

所以当 $0<x<1$ 时,$r(x)<0$,当 $x>1$ 时,$r(x)>0$,所以 $u(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

不妨设 $x_1<x_2$,所以 $0<x_1<1<x_2, 0<\frac{1}{x_2}<1$, ………………………………………………………… 6分

因为 $u(x_1)=u(x_2)=0$,所以 $u(x_1)-u\left(\frac{1}{x_2}\right)=u(x_2)-u\left(\frac{1}{x_2}\right)=\left(x_2^2-\frac{2\ln x_2}{x_2}-a\right)-\left(\frac{1}{x_2^2}-\frac{2\ln\frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_2}}-a\right)=x_2^2-\frac{2\ln x_2}{x_2}$

$-\frac{1}{x_2^2}-2x_2\ln x_2=\left(x_2-\frac{1}{x_2}-2\ln x_2\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)$, ………………………………………………………… 8分

设 $h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x, x>1$,则 $h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}>0$,

故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(x)>h(1)=0$,故 $u(x_1)-u\left(\frac{1}{x_2}\right)>0$,即 $u(x_1)>u\left(\frac{1}{x_2}\right)$,

又 $0<x_1<1, 0<\frac{1}{x_2}<1$, $u(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,所以 $x_1<\frac{1}{x_2}$,所以 $x_1x_2<1$. ……………………………… 12分

22. 解:(1)由$\begin{cases}x=t+\dfrac{3}{t},\\ y=t-\dfrac{3}{t}\end{cases}$消去$t$得$x^2-y^2=12$,即$C$的普通方程为$x^2-y^2=12$. ………………………… 3 分

因为直线l的极坐标方程为$\theta=\dfrac{2\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$,所以直线$l$的直角坐标方程为$y=-\sqrt{3}x$. ……………………

(2)设$P\left(t+\dfrac{3}{t},t-\dfrac{3}{t}\right)$,则$P$到直线$l$的距离

$$d=\frac{\left|\sqrt{3}\left(t+\frac{3}{t}\right)+t-\frac{3}{t}\right|}{2}=\frac{1}{2}\left|(\sqrt{3}+1)t+\frac{3}{t}(\sqrt{3}-1)\right|\geqslant\frac{1}{2}\times2\sqrt{|(\sqrt{3}+1)t|\cdot\left|\frac{3}{t}(\sqrt{3}-1)\right|}=\sqrt{6},$$

当且仅当$|(\sqrt{3}+1)t|=\left|\dfrac{3}{t}(\sqrt{3}-1)\right|$,即$t=\pm\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$时等号成立,

所以点P到直线l的距离的最小值为$\sqrt{6}$. ………………………… 10 分

23. 解:(1)$f(x)=|x+1|-|2x-1|=\begin{cases}x-2,x<-1,\\ 3x,-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 2-x,x>\dfrac{1}{2},\end{cases}$ ………………………… 1 分

当$x<-1$时,由$x-2\leqslant-2$,解得$x\leqslant0$,所以$x<-1$; ………………………… 2 分

当$-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$时,由$3x\leqslant-2$,解得$x\leqslant-\dfrac{2}{3}$,所以$-1\leqslant x\leqslant-\dfrac{2}{3}$; ………………………… 3 分

当$x>\dfrac{1}{2}$时,由$2-x\leqslant-2$,解得$x\geqslant4$,所以$x\geqslant4$. ………………………… 4 分

综上,不等式$f(x)\leqslant-2$的解集为$\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right]\cup[4,+\infty)$. ………………………… 5 分

(2)不等式$f(x)\leqslant x+3a^2-2a$对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$恒成立,

等价于$f(x)-x\leqslant3a^2-2a$对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$恒成立,

则$3a^2-2a\geqslant[f(x)-x]_{\max}$. ………………………… 7 分

令$g(x)=f(x)-x=\begin{cases}-2,x<-1,\\ 2x,-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 2-2x,x>\dfrac{1}{2},\end{cases}$则$g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. ………………………… 8 分

即$3a^2-2a\geqslant1$,解得$a\leqslant-\dfrac{1}{3}$或$a\geqslant1$,即a的取值范围是$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty)$. ……

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。