耀正优$^+$2023 届高三 12 月阶段检测联考・数学

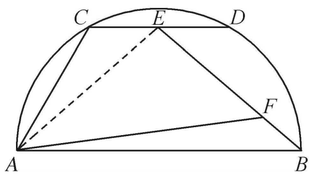
参考答案、提示及评分细则

1. B　$A=\{x\mid x-2>0\}=\{x\mid x>2\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid x>2\}\cup\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}=\{x\mid x\geqslant 1\}$. 故选 B.

2. A　因为复数 z 在复平面内对应的点为 $(3,-1)$，所以 $z=3-\mathrm{i}$，所以 $\frac{\overline{z+1}}{\bar{z}}=\frac{\overline{4-\mathrm{i}}}{\overline{3-\mathrm{i}}}=\frac{(4+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=\frac{11+7\mathrm{i}}{10}=\frac{11}{10}+\frac{7}{10}\mathrm{i}$. 故选 A.

3. B　所取 3 个球的最小号码是 4，则编号为 4 的球必选，再从编号为 5，6，7，8 的球中选 2 个，则所取 3 个球的最小号码是 4 的概率 $P=\frac{C_4^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$. 故选 B.

4. C　如图，连接 AE. 因为 C,D 是以 AB 为直径的半圆圆周上的两个三等分点，则 $AB\,/\!/\,CD$，且 $AB=2CD$. 又 F 为 BE 上靠近 B 的一个四等分点，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE})+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{CD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{13}{16}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$. 故选 C.

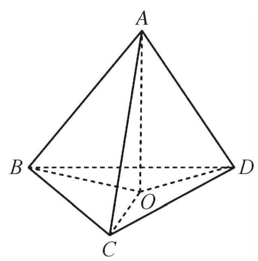


5. C　因为 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，所以 $a_{2\,023}=a_{2\,022}+a_{2\,021}=a_{2\,022}+a_{2\,020}+a_{2\,019}=\cdots=a_{2\,022}+a_{2\,020}+a_{2\,018}+\cdots+a_2+a_1$　①，$a_{2\,024}=a_{2\,023}+a_{2\,022}=a_{2\,023}+a_{2\,021}+a_{2\,020}=\cdots=a_{2\,023}+a_{2\,021}+a_{2\,019}+\cdots+a_5+a_3+a_2$　②，由①+②，得 $a_{2\,023}+a_{2\,024}=S_{2\,023}+a_2$，又 $a_{2\,023}=m$，$a_{2\,024}=n$，$a_2=1$，即 $m+n=S_{2\,023}+1$，所以 $S_{2\,023}=m+n-1$. 故选 C.

6. D　由题意可知，将函数 $y=g(x)$ 图象上的点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，可得 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴负半轴的第一个交点为 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$，因为 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴正半轴的第一个交点为 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$，所以 $T=2\times\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=2$，则 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$. 又 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$ 且 $-\frac{\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 增区间上的零点，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 知 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，故 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

7. D　$a=\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$，$b=\tan\frac{3}{2}>\frac{3}{2}$，$c=\frac{18}{4\log_5 6+9\log_6 5}=\frac{18}{4\log_5 6+\frac{9}{\log_5 6}}<\frac{18}{2\sqrt{4\log_5 6\cdot\frac{9}{\log_5 6}}}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$，所以 $b>a>c$. 故选 D.

8. A　设点 A 在平面 BCD 内的射影为点 O，连接 AO、BO，如图所示，则 O 为等边 $\triangle BCD$ 的中心，故 $OB=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，因为 $AO\perp$ 平面 BCD，$BO\subset$ 平面 BCD，所以 $AO\perp BO$，所以 $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AO=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. 因为平面 $B_1C_1D_1\,/\!/$ 平面 BCD，则 $\triangle B_1C_1D_1\backsim\triangle BCD$，$\frac{S_{\triangle B_1C_1D_1}}{S_{\triangle BCD}}=\left(\frac{AD_1}{AD}\right)^2=x^2$，且点 A 到平面 $B_1C_1D_1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}ax$，所以点 A_1 到平面 $B_1C_1D_1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a(1-x)$，

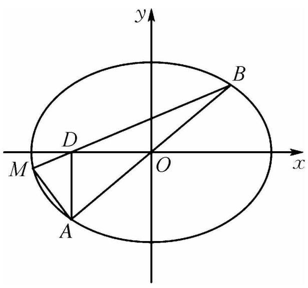


所以 $V=f(x)=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1C_1D_1}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a(1-x)=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3x^2(1-x)$，其中 $0<x<1$，对于 A 选项，$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3(2x-3x^2)$，当 $0<x<\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，$f(x)\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{81}a^3\right)$；当 $\frac{2}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，$f(x)\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{81}a^3\right)$，故 A 正确，B 错误；对于 C 选项，$f(1-x)=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3[(1-x)^2-(1-x)^3]=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3(x^3-2x^2+x)\neq f(x)$，故函数 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，故 C 错误；对于 D 选项，$\frac{1}{6}V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{\sqrt{2}}{72}a^3$，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{81}a^3<\frac{\sqrt{2}}{72}a^3$，故对任意的 $x\in(0,1)$，$f(x)<\frac{1}{6}V_{A\text{-}BCD}$，故 D 错误. 故选 A.

9. ACD　因为 $AC\parallel A_1C_1$，$AC\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $AC\parallel$ 平面 A_1BC_1，故 A 正确；$\angle DAC=45°$，AD 与 AC 不垂直，则 AD 与 A_1C_1 不垂直，$AD\perp$ 平面 A_1BC_1 不正确，故 B 错误；因为 $AC\parallel A_1C_1$，$AC\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $AC\parallel$ 平面 A_1BC_1，同理 $AD_1\parallel$ 平面 A_1BC_1，又 $AC\cap AD_1=A$，所以平面 $A_1BC_1\parallel$ 平面 ACD_1，故 C 正确；正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $BB_1\perp A_1C_1$，又 $B_1D_1\perp A_1C_1$，可得 $A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，从而平面 $A_1BC_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，故 D 正确. 故选 ACD.

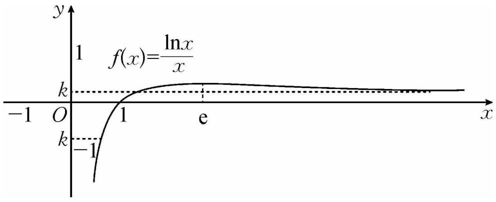
10. AB　因为 $\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\cos 2\alpha=\frac{4}{5}$ 或 $\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$，当 $\cos 2\alpha=\frac{4}{5}$ 时，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\alpha+\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ 与 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 矛盾，所以 $\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$，故 A 正确；因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$，$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\cos 2\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin 2\alpha\sin(\alpha+\beta)=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 B 正确；$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$　①，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$　②，由①+②得，$2\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，解得 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{10}$，故 C 错误；由①−②得，$2\sin\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，解得 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{5}}{10}$，$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{10}}=3$，故 D 错误. 故选 AB.

11. BCD　对于 A，如图，由对称性，不妨设 D 为椭圆的左焦点，则 $D(-1,0)$，故易得 $A\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $|OA|=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则 $|AB|=\sqrt{6}$，又因为 $|AD|+|BD|=2a=2\sqrt{2}$，所以 $\triangle ABD$ 的周长为 $2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，故 A 错误；对于 B，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=x\end{cases}$ 解得 $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，不妨设 $A\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$D\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$，则 $|y_A-y_B|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$|OD|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2}{3}$，故 B 正确；对于 C，设 $A(x_0,y_0)$，$B(-x_0,-y_0)$，则 $D(x_0,0)$，所以 $k_{BM}=k_{BD}=\frac{y_0}{2x_0}=\frac{1}{2}k$，故 C 正确；对于 D，设 $A(x_0,y_0)$，$M(m,n)$，则 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{n-y_0}{m-x_0}\cdot\frac{n+y_0}{m+x_0}=\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}$，又点 M 和点 A 在椭圆 C 上，$\frac{m^2}{2}+n^2=1$　①，$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$　②，①−②得 $\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}=-\frac{1}{2}$，因为 $k_{MB}=\frac{1}{2}k$，则 $k_{MA}\cdot\frac{1}{2}k=-\frac{1}{2}$，得 $k_{MA}\cdot k=-1$，所以 $AM\perp AB$，故 D 正确. 故选 BCD.



12. ACD　由已知，当 $k>0$ 时，即 $\frac{\ln x_1}{x_1}>0$，$x_1>1$，$\frac{x_2}{e^{x_2}}>0$，$x_2>0$，所以有 $x_1+x_2>1$，故 A 项正确；取 $x_1=e^2$，则

$f(x_1)=\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{2}{e^2}$，此时令 $x_2=2$，则有 $g(x_2)=\frac{2}{e^2}=f(x_1)$，$x_1+e^{x_2}=e^2+e^2=2e^2>2e$，故 B 项错误；因为 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g(x)=\frac{x}{e^x}$，所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 的图象如图所示.



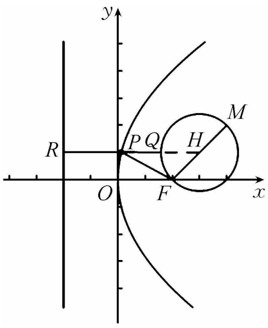
又 $f(x_1)=g(x_2)=k$，即 $\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln e^{x_2}}{e^{x_2}}=k$. 当 $k<0$ 时，如图易知，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 与 $y=k$ 只有一个交点，由 $f(x_1)=g(x_2)=k$，可得此时 $x_1=e^{x_2}$，$x_2=\ln x_1$，$0<x_1<1$，则 $\frac{x_2}{x_1}\cdot e^k=\frac{\ln x_1}{x_1}\cdot e^k=ke^k$. 令 $h(k)=ke^k$，则 $h'(k)=(1+k)e^k$. 当 $-1<k<0$ 时，$h'(k)=(1+k)e^k>0$，即 $h(k)=ke^k$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增；当 $k<-1$ 时，$h'(k)=(1+k)e^k<0$，即 $h(k)=ke^k$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减. 所以 $h(k)=ke^k$ 在 $k=-1$ 处有最小值 $h(-1)=-\frac{1}{e}$，故 C 项正确；当 $k<0$ 时，$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\cdot e^k=k^2e^k$. 令 $m(k)=k^2e^k$，$m'(k)=(k^2+2k)e^k=k(k+2)e^k$. 当 $-2<k<0$ 时，$m'(k)=k(2+k)e^k<0$，即 $m(k)=k^2e^k$ 在 $(-2,0)$ 上单调递减；当 $k<-2$ 时，$m'(k)=k(2+k)e^k>0$，即 $m(k)=k^2e^k$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增. 所以 $m(k)=k^2e^k$ 在 $k=-2$ 处有最大值 $m(-2)=\frac{4}{e^2}$，故 D 项正确. 故选 ACD.

13. 270　$(x+3)^5$ 的展开式的通项为 $T_{n+1}=C_5^n x^{5-n}3^n$，所以 $a_3x^3=x\cdot T_4=x\cdot C_5^3x^{5-3}3^3=270x^3$，则 $a_3=270$.

14. $2x+y=0$（$2x+y-10=0$ 一样给分）　设与直线 $2x+y+1=0$ 平行的直线为 $2x+y+m=0$，且 $m\neq1$，圆 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 整理为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，则圆心为 $(2,1)$，半径 $r=\sqrt{5}$，又直线 $2x+y+m=0$ 与圆相切，则圆心 $(2,1)$ 到直线 $2x+y+m=0$ 的距离为 $\frac{|4+1+m|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$，解得 $m=0$ 或 $m=-10$，则直线方程为 $2x+y=0$ 或 $2x+y-10=0$.

15. 24（3 分）　49（2 分）　由图可知，分数在 20 分以下的比例为 $0.001\times20=0.02$，在 40 分以下的比例为 $(0.001+0.0075)\times20=0.17$，因此 5%分位数（$C$ 级的分数线）位于 $[20,40)$ 内，由 $20+20\times\frac{0.05-0.02}{0.15}=24$，所以 C 级的分数线为 24；由 $40+\frac{0.35-0.17}{0.4}\times20=49$.

16. $5-\sqrt{2}$　将已知直线 $(m+1)x+y-4m-6=0$ 化为 $m(x-4)+x+y-6=0$，当 $x=4$ 时 $y=2$，可确定直线过定点 $(4,2)$，记为 M 点. 因为过点 F 做直线 $(m+1)x+y-4m-6=0$ 的垂线，垂足为 Q，所以 $FQ\perp MQ$，$\angle FQM=90°$，故 Q 点在以 FM 为直径的圆上，半径 $r=\sqrt{2}$，其圆心为 FM 的中点，记为点 H，所以 $H(3,1)$，因为 P 在抛物线 $C:y^2=8x$ 上，其准线为 $x=-2$，所以 $|PF|$ 等于 P 到准线的距离. 过 P 作准线的垂线，垂足为 R. 要使 $|PF|+|PQ|$ 取到最小，即 $|PR|+|PQ|$ 最小，此时 R,P,Q 三点共线，且三点连线后直线 RQ 过圆心 H. 如图所示，此时 $(|PR|+|PQ|)_{\min}=|HR|-r=5-\sqrt{2}$.



17. 解：(1) 因为 $\sin B=2\sin A$，由正弦定理得 $b=2a$，………………………… 2 分

又 $b=4$，所以 $a=2$，

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2^2+4^2-c^2}{2\times2\times4}=\frac{11}{16}$，解得 $c=3$. ………………………………………… 5 分

(2) 因为 $\cos C=\frac{11}{16}$，$A\in(0,\pi)$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$， …… 6分

所以△ABC的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{3\sqrt{15}}{16}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. …… 7分

设△ABC内切圆的半径为 r，则 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$，所以 $r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{\sqrt{15}}{6}$， …… 9分

所以内切圆的面积为 $\pi r^2=\frac{5}{12}\pi$. …… 10分

18.解：(1)因为 $a_{n+1}^2+2a_{n+1}a_n-4a_{n+1}=3a_n^2+12a_n$，

所以 $(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+3a_n)=4(a_{n+1}+3a_n)$， …… 2分

因为 $\{a_n\}$ 各项均为正数，$a_{n+1}+3a_n>0$，

所以 $a_{n+1}-a_n=4$， …… 4分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为4，公差为4的等差数列， …… 5分

$a_n=4+(n-1)\times4=4n$. …… 6分

(2) $\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{4n\times4(n+2)}=\frac{1}{16}\times\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$， …… 8分

$S_n=\frac{1}{32}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{32}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{64}-\frac{1}{32}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$， …… 10分

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，故 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}>0$，

所以 $S_n<\frac{3}{64}$，又 $a_n>0$，所以 $S_n\geqslant S_1=\frac{1}{48}$， …… 11分

所以 S_n 的取值范围为 $\left[\frac{1}{48},\frac{3}{64}\right)$. …… 12分

19.解：(1)由题意可知中年人亚健康且平均每天锻炼时间不足半小时的人数为15，

故 $P(AB)=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$； …… 2分

中年人中平均每天锻炼时间超过半小时的人数为70，其中无亚健康的人数为 $32+28=60$，

故 $P(A|B)=\frac{60}{70}=\frac{6}{7}$. …… 5分

(2)列联表如下：

平均每天锻炼时间	不足1小时	1小时及以上	合计
亚健康	23	2	25
无亚健康	47	28	75
合计	70	30	100

…… 8分

零假设为 H_0：亚健康与锻炼时间没有关联，

$\chi^2=\frac{100\times(23\times28-47\times2)^2}{25\times75\times70\times30}=\frac{484}{63}\approx7.683>6.635=x_{0.01}$， …… 10分

依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的 χ^2 独立性检验，我们推断 H_0 不成立，可以认为亚健康与锻炼时间有关联，该推断犯错误的概率不超过0.01. …… 12分

20.解：(1)设 $AC\cap BD=O$，AC_1 的中点为 Q，连结 PQ,OQ,AQ，显然 Q 为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 外接球的球心，且 $OQ\perp$平面 $ABCD$， …… 1分

由题意知，$OA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$OQ=1$，$AQ=\sqrt{OA^2+OQ^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AP=\sqrt{2}$，

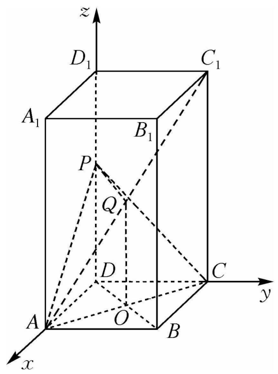
所以 $PQ^2+AQ^2=AP^2$，所以 $AQ\perp PQ$， …… 3分

设 Q 到直线 AP 的距离为 d，则 $\frac{1}{2}AP\cdot d=\frac{1}{2}PQ\cdot AQ$，解得 $d=\frac{\sqrt{6}}{4}$， …… 4分

因为外接球的半径 $R=\frac{1}{2}BD_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以直线 AP 被此外接球截得的弦长为 $2\sqrt{R^2-d^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. …… 6分

(2)以 D 为原点,建立空间直角坐标系(如图),

则 $D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$D_1(0,0,2)$,$C_1(0,1,2)$,$P(0,0,1)$. ………………………………………………………………………… 7 分



设平面 PAC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

因为 $\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,0,1)$,

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=x,\\ z=x.\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$; ………… 9 分

又 $\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,2)$,

设直线 AC_1 与平面 PAC 所成的角为 θ,

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AC_1}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{(-1,1,2)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$,

所以直线 AC_1 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. ……………………………………………………… 12 分

21. (1)解:因为 $||PF_1|-|PF_2||=2\sqrt{2}$,

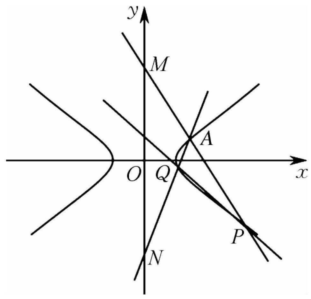
所以 $2a=2\sqrt{2}$,解得 $a=\sqrt{2}$, …………………………………………………………………………… 1 分

设双曲线 C 的半焦距为 c,因为离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,解得 $c=\sqrt{3}$, ……………………………………………………………………………… 2 分

则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=1$, ……………………………………………………………………………………… 3 分

所以双曲线 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$. …………………………………………………………………… 4 分



(2)证明:设 $M(0,m)$,则 $N(0,-m)$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,$k_{AM}=\dfrac{1-m}{2}$,

$k_{AN}=\dfrac{1+m}{2}$,

直线 AP 的方程为 $y=k_{AM}x+m=\dfrac{1-m}{2}x+m$,

直线 AQ 的方程为 $y=k_{AN}x-m=\dfrac{1+m}{2}x-m$. ……………………………… 5 分

联立方程 $\begin{cases}y=\dfrac{1-m}{2}x+m,\\ x^2-2y^2=2,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $\left[1-\dfrac{(1-m)^2}{2}\right]x^2+2m(m-1)x-2m^2-2=0$,

显然 $\begin{cases}1-\dfrac{(1-m)^2}{2}\neq0,\\ \Delta=4m^2(1-m)^2+4(2m^2+2)\left[1-\dfrac{(1-m)^2}{2}\right]>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\neq1+\sqrt{2},\\ m\neq1-\sqrt{2},\\ m\neq-1,\end{cases}$

$2x_1=-\dfrac{2m^2+2}{1-\dfrac{(1-m)^2}{2}}$,$x_1=\dfrac{2m^2+2}{(m-1)^2-2}$,$y_1=\dfrac{1-m}{2}x_1+m=-\dfrac{(m+1)^2-2}{(m-1)^2-2}$, ………………………… 7 分

联立方程 $\begin{cases}y=\dfrac{1+m}{2}x-m,\\ x^2-2y^2=2,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $\left[1-\dfrac{(m+1)^2}{2}\right]x^2+2m(m+1)x-2m^2-2=0$,

显然 $\begin{cases}1-\dfrac{(m+1)^2}{2}\neq0,\\ \Delta=4m^2(m+1)^2+4(2m^2+2)\left[1-\dfrac{(m+1)^2}{2}\right]>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\neq-1+\sqrt{2},\\ m\neq-1-\sqrt{2},\\ m\neq1.\end{cases}$

$x_2=\dfrac{2m^2+2}{(m+1)^2-2}$,$y_2=\dfrac{1+m}{2}x_2-m=-\dfrac{(m-1)^2-2}{(m+1)^2-2}$, ……………………………………………………… 9 分

即当 $m\neq\pm1$,$m\neq\pm\sqrt{2}+1$,$m\neq\pm\sqrt{2}-1$ 时,直线 PQ 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, ………… 10 分

将上面求得的 x_1,x_2,y_1,y_2 的解析式代入得 $y+\frac{(m+1)^2-2}{(m-1)^2-2}=-\frac{m^2-1}{m^2+1}\left[x-\frac{2m^2+2}{(m-1)^2-2}\right]$，

整理得 $y=-\frac{m^2-1}{m^2+1}x+1$， …………………………………………………………………………… 11 分

所以直线 l 过定点 $(0,1)$. ……………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)函数 $f(x)=(\ln x)^2+a\ln x+a$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

则 $f'(x)=\frac{2\ln x+a}{x}$， ……………………………………………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=e^{-\frac{a}{2}}$，

当 x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,e^{-\frac{a}{2}})$	$e^{-\frac{a}{2}}$	$(e^{-\frac{a}{2}},+\infty)$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	单调递减	$\frac{a^2}{4}+a$	单调递增

……… 3 分

因此，当 $x=e^{-\frac{a}{2}}$ 时，$f(x)$ 有极小值，并且极小值为 $-\frac{a^2}{4}+a$，无极大值. ……………………… 4 分

(2)因为 $xf(x)+2e^2\geqslant 0$ 等价于 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]\geqslant -2e^2$，

令 $h(x)=x[(\ln x)^2+a\ln x+a]$，$x\in(0,+\infty)$，则

$h'(x)=(\ln x)^2+a\ln x+a+x\left(\frac{2\ln x}{x}+\frac{a}{x}\right)=(\ln x+2)(\ln x+a)$， ……………………………… 5 分

(ⅰ)若 $a\in[0,4]$，对于函数 $y=(\ln x)^2+a\ln x+a$，有 $\Delta=a^2-4a\leqslant 0$，

所以 $(\ln x)^2+a\ln x+a\geqslant 0$ 恒成立，

故当 $a\in[0,4]$ 时，不等式 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]\geqslant -2e^2$ 恒成立； …………………………………… 6 分

(ⅱ)若 $a\in(4,+\infty)$，

当 $x\in(0,e^{-a}]$ 时，$(\ln x)^2+a\ln x+a=\ln x(\ln x+a)+a>0$，所以 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]>0$，

故不等式 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]\geqslant -2e^2$ 恒成立； ………………………………………………………… 7 分

现探究当 $x\in(e^{-a},+\infty)$ 时的情况：

当 $x\in(e^{-a},e^{-2})$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 (e^{-a},e^{-2}) 上单调递减，在 $(e^{-2},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=e^{-2}$ 是 $h(x)$ 的极小值点， ………………………………………………………………………… 8 分

要使不等式 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]\geqslant -2e^2$ 成立，只需 $h(e^{-2})=e^{-2}(4-2a+a)\geqslant -2e^2$，

解得 $a\leqslant 4+2e^4$，

故当 $4<a\leqslant 4+2e^4$ 时，不等式 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]\geqslant -2e^2$ 恒成立；………………………………… 9 分

(ⅲ)若 $a\in(-\infty,0)$，

当 $x\in(0,e^{-2}]$ 时，$(\ln x)^2+a\ln x+a=(\ln x)^2+a(\ln x+1)>0$，所以 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]>0$，

故不等式 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]\geqslant -2e^2$ 恒成立；

现探究当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时的情况：

当 $x\in(e^{-2},e^{-a})$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(e^{-a},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 (e^{-2},e^{-a}) 上单调递减，在 $(e^{-a},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=e^{-a}$ 是 $h(x)$ 的极小值点， ………………………………………………………………………… 10 分

要使不等式 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]\geqslant -2e^2$ 成立，只需 $h(e^{-a})=e^{-a}(a^2-a^2+a)\geqslant -2e^2$，

即 $ae^{-a}\geqslant -2e^2$.

设 $m(x)=\frac{x}{e^x}(x<0)$，则 $ae^{-a}\geqslant -2e^2$ 化为 $m(a)\geqslant m(-2)$，……………………………………… 11 分

因为 $m'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$，所以 $m(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，

于是，由 $m(a)\geqslant m(-2)$ 及 $a<0$，得 $-2\leqslant a<0$，

故当 $-2\leqslant a<0$ 时，不等式 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]\geqslant -2e^2$ 恒成立.

综上，实数 a 的取值范围为 $[-2,4+2e^4]$. …………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。