

2023 届“3+3+3” 高考备考诊断性联考卷（三） 数 学

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、考号、座位号填写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 若 $z = a + \frac{i}{1-i}$ ($a \in \mathbb{R}$) 是纯虚数, 则 $a =$
 A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1
2. 设集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 4x\}$, $B = \{x \mid y = \sqrt{x-2}\}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbb{N}} B =$
 A. $[-1, 2]$ B. $[0, 2]$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
3. 近期, 我国多地纷纷进入“甲流”高发期, 某地 A, B 两所医院因发热就诊的患者中分别有 37.25%、18% 被确诊为“甲流”感染, 且到 A 医院就诊的发热患者人数是到 B 医院的四倍. 现从到这两所医院就诊的发热患者中任选一人, 则此人未感染“甲流”的概率是
 A. 0.785 B. 0.666 C. 0.592 D. 0.235
4. 若向量 $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (3, -4)$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量为
 A. $(-\frac{33}{25}, \frac{44}{25})$ B. $(\frac{33}{25}, -\frac{44}{25})$ C. $(33, 44)$ D. $-\frac{11\sqrt{5}}{25}$
5. 在 3 世纪, 古希腊数学家帕普斯在他的著作《数学汇编》中完善了欧几里得关于圆锥曲线的统一定义. 他指出, 到定点的距离与到定直线的距离的比是常数 e 的点的轨迹叫做圆锥曲线: 当 $0 < e < 1$ 时, 轨迹为椭圆; 当 $e = 1$ 时, 轨迹为抛物线; 当 $e > 1$ 时, 轨迹为双曲线. 现有方程 $k(x+2y+1)^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4$ 表示的曲线是双曲线, 则 k 的取值范围为
 A. $(0, \frac{1}{5}]$ B. $(\frac{1}{5}, +\infty)$ C. $(5, +\infty)$ D. $(0, 5)$
6. 如图 1, 已知半径为 r 、母线长为 l 的圆锥 SO 的侧面展开图是半圆, 在其内部作一个半径为 r_0 、母线长为 l_0 的内接圆柱 PO (圆柱的下底面在圆锥的底面上, 上底面的圆在圆锥的侧面上), 若圆柱 PO 的侧面积与圆锥 SO 的侧面积之比为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 则 $\frac{l}{l_0} =$
 A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

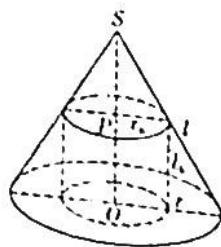


图 1

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_{16} > 0$, $a_7 + a_9 < 0$, 则当 S_n 取最小值时, n 的值为_____.
14. 某产品的质量指标服从正态分布 $N(50, \sigma^2)$. 质量指标介于 47 至 53 之间的产品为合格品, 为使这种产品的合格率达到 99.74%, 则需调整生产效能, 使得 σ 至多为_____. (参考数据: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(|X - \mu| < 3\sigma) \approx 0.9974$)
15. 已知抛物线 $x^2 = y$ 上有一点 $P(\sqrt{3}, 3)$, 过点 P 作圆 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 的两条切线分别交抛物线于 M, N 两点(异于点 P), 则直线 MN 的斜率为_____.
16. 设函数 $f(x) = xe^x + ax$, $a > -1$, 若存在唯一整数 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是_____.

四、解答题（共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤）

17. (本小题满分10分)

已知数列 $\{a_n\}$ 有递推关系 $a_{n+1} = \frac{7a_n - 8}{3a_n - 4}$ ($n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \neq \frac{4}{3}$), $a_1 = \frac{69}{29}$, 记 $a_n = b_n - k$, 若数列 $\{b_n\}$

的递推式形如 $b_{n+1} = \frac{rb_n}{pb_n + q}$ ($p, q, r \in \mathbf{R}$ 且 $p, r \neq 0$), 也即分子中不再含有常数项.

(1) 求实数 k ($k \in \mathbf{Z}$) 的值;

(2) 证明: $\left\{\frac{1}{b_n} - \frac{3}{5}\right\}$ 为等比数列, 并求其首项和公比.

18. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \omega x + 2$ ($\omega \in \mathbf{N}^*$) 在 $\left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调, 且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若钝角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $a = 2$, $f\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{3} + 1$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

19. (本小题满分12分)

某商场在周年庆活动期间为回馈新老顾客, 采用抽奖的形式领取购物卡. 该商场在一个纸箱里放 15 个小球 (除颜色外其余均相同): 3 个红球、5 个黄球和 7 个白球, 每个顾客不放回地从中拿 3 次, 每次拿 1 个球, 每拿到一个红球获得一张 A 类购物卡, 每拿到一个黄球获得一张 B 类购物卡, 每拿到一个白球获得一张 C 类购物卡.

(1) 已知某顾客在 3 次中只有 1 次抽到白球的条件下, 求至多有 1 次抽到红球的概率;

(2) 设拿到红球的次数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

20. (本小题满分 12 分)

如图 3, 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BC=8$, $AB=AC=5$, $B_1C_1=CC_1=4$, M, O 分别为 B_1C_1, BC 的中点.

(1) 证明: 平面 $ABC \perp$ 平面 AOM ;

(2) 记二面角 $A-BC-C_1$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 求直线 BB_1 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值.

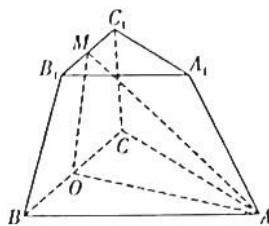


图 3

21. (本小题满分 12 分)

如图 4, 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上、下顶点为 $M(0, 1), N(0, -1)$, 右顶点为

P , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $x=a$ 和 $y=b$ 相交于点 A , 过 N 作直线交 x 轴的正半轴于 B 点, 交椭圆于 C 点, 连接 MC 交 AP 于点 D .

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 求证: $\frac{|OB|}{|BP|} = \frac{|AD|}{|DP|}$.

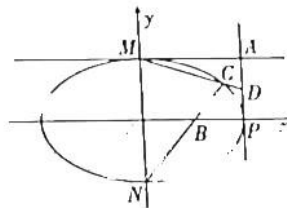


图 4

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 - \ln x}{x}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $g(x) = xf(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 有 2 个不同的零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证: $x_1^2 + 4x_2^2 > \frac{5}{2a}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

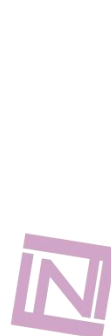


 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw