青海省大通县教学研究室2023届高三第二次模拟考试

数　学(理科)

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分,考试时间120分钟。
2. 答题前,考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,**超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x\mid\log_2 x<3\}$,$N=\{x\mid x>-1\}$,则 $M\cap N=$

A. $(-1,8)$　　B. $(0,8)$　　C. $(-1,6)$　　D. $(0,6)$

2. 已知 i 是虚数单位,若 $z_1=2+\mathrm{i}$,$z_2=1+\mathrm{i}$,则 $z=z_1\cdot\overline{z_2}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所成角为

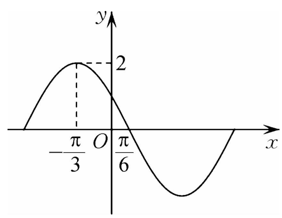
A. $\frac{5}{6}\pi$　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

4. 使"$a<b$"成立的一个充分不必要条件是

A. $\forall x\in(0,1]$,$a\leqslant b+x$　　B. $\forall x\in(0,1]$,$a+x<b$

C. $\exists x\in[0,1]$,$a<b+x$　　D. $\exists x\in[0,1]$,$a+x\leqslant b$

5. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示,则 $f(x)$ 图象的一个对称中心是



A. $\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$　　B. $\left(-\frac{4\pi}{3},0\right)$

C. $\left(\frac{8\pi}{3},0\right)$　　D. $\left(-\frac{11\pi}{6},0\right)$

6. 已知实数 $a\neq1$,函数 $f(x)=\begin{cases}4^x, & x\geqslant0,\\ 2^{a-x}, & x<0,\end{cases}$ 若 $f(1-a)=f(a-1)$,则 a 的值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

7. 有 2 男 2 女共 4 名大学毕业生被分配到 A,B,C 三个工厂实习，每人必须去一个工厂且每个工厂至少去 1 人，且 A 工厂只接收女生，则不同的分配方法种数为

A. 12　　B. 14　　C. 36　　D. 72

8. 已知图 1 对应的函数为 $y=f(x)$，则图 2 对应的函数是

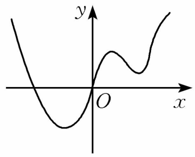


图1

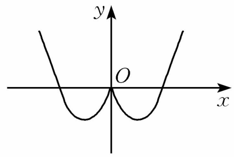


图2

A. $y=f(-|x|)$　　B. $y=f(-x)$　　C. $y=f(|x|)$　　D. $y=-f(-x)$

9. 在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$ 中，若 $\cos A=\sin A_1$，$\cos B=\sin B_1$，$\cos C=\sin C_1$，则

A. $\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 均是锐角三角形

B. $\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 均是钝角三角形

C. $\triangle ABC$ 是钝角三角形，$\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形

D. $\triangle ABC$ 是锐角三角形，$\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形

10. 已知函数 $f(x)=x^3-ax+2(a\in\mathbf{R})$，则下列说法错误的是

A. 当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$不存在极值点　　B. 当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$有三个零点

C. 点$(0,2)$是曲线 $y=f(x)$的对称中心　　D. 若 $y=2x$ 是函数 $f(x)$的一条切线，则 $a=1$

11. 已知矩形 $ABCD$ 的顶点都在球心为 O 的球面上，$AB=3$，$BC=\sqrt{3}$，且四棱锥 $O-ABCD$ 的体积为$4\sqrt{3}$，则球 O 的表面积为

A. 76π　　B. 112π　　C. $\dfrac{76\sqrt{3}\pi}{3}$　　D. $\dfrac{224\sqrt{7}\pi}{3}$

12. 设 F_1,F_2 分别是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P，若$|PF_1|=\sqrt{6}|PF_2|$，则 C 的离心率为

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $y=\log_a(3x-2)+2(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象过定点 A，若抛物线 $y^2=2px$ 也过点 A，则抛物线的准线方程为__________.

14. 已知 α 为锐角，且 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos\alpha=$__________.

15. 关于正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 有如下说法：

①直线 A_1B 与 B_1C 所成的角为 $60°$；　②直线 CA_1 与 C_1D 所成的角为 $60°$；

③直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$；④直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$.

其中正确命题的序号是________.

16. 设 ξ 为随机变量，从棱长为 1 的正方体的 12 条棱中任取两条，当两条棱相交时，$\xi=0$；当两条棱平行时，ξ 的值为两条棱之间的距离；当两条棱异面时，ξ 为两条棱上两点（不在同一条棱上）间距离的最小值，则随机变量 ξ 的数学期望为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

造林绿化对生态发展特别是在防风固沙、缓解温室效应、净化空气、涵养水源等方面有着重要意义. 某苗木培养基地为了对某种树苗的高度偏差 x（单位：cm）与树干最大直径偏差 y（单位：mm）之间的关系进行分析，随机挑选了 8 株该品种的树苗，得到它们的偏差数据（偏差是指个别测定值与测定的平均值之差）如下：

树苗序号	1	2	3	4	5	6	7	8
高度偏差 x	20	15	13	3	2	-5	-10	-18
直径偏差 y	6.5	3.5	3.5	1.5	0.5	-0.5	-2.5	-3.5

（1）若 x 与 y 之间具有线性相关关系，求 y 关于 x 的线性回归方程；

（2）若这种树苗的平均高度为 120 cm，树干最大直径平均为 31.5 mm，试由（1）的结论预测高度为 128 cm 的这种树苗的树干最大直径为多少毫米.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i=324$，$\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2=1\ 256$.

参考公式：回归直线方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n+S_n=1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

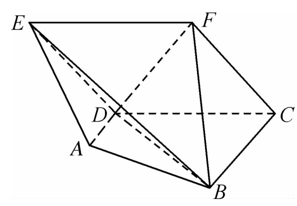
（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=12+\log_2 a_n$，设 $T_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|$，求 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AD\perp CD$，四边形 $CDEF$ 为平行四边形，平面 $CDEF\perp$ 平面 $ABCD$，$BC=2AD$，$\angle FCD=\dfrac{\pi}{3}$.

（1）证明：$DF /\!/$ 平面 ABE；

（2）若 $AD=1$，$CD=DE=2$，求二面角 $E-BD-F$ 的正弦值.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,直线 $l:y=x+t$ 与 C 交于 M,N 两点,且线段 MN 的中点为 H,O 为坐标原点,直线 OH 的斜率为$-\frac{1}{2}$.

(1)求 C 的标准方程;

(2)已知直线 $y=kx+2$ 与 C 有两个不同的交点 A,B,P 为 x 轴上一点.是否存在实数 k,使得$\triangle PAB$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形?若存在,求出 k 的值及点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ax-\frac{b}{x}-2\ln x(a>0)$.

(1)若 $a=b$,讨论 $f(x)$的单调性;

(2)当 $a=1,b>1,f'(x)=m$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2,证明:$f(x_1)+f(x_2)+2m>0$.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数).以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

(1)求 C 的直角坐标方程;

(2)设点 M 的直角坐标为$(5,\sqrt{3})$,直线 l 与 C 的交点为 A,B,求$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$的值.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|2x+2|+|x-1|$.

(1)解不等式 $f(x)\geqslant 7$;

(2)若 $a^2+b^2\leqslant f(x)+|x-1|(a>0,b>0)$对任意实数 x 都成立,求 $a+b$ 的最大值.