高 三 阶 段 性 抽 测 一
数 学 参 考 答 案

2023.10

一、单项选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共计 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	B	D	D	A	A	D

二、多项选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共计 20 分.

题号	9	10	11	12
答案	BC	BCD	AC	ABC

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共计 20 分.

13. $a \leqslant 2$　14. $\frac{7}{9}$　15. $\left(0,\frac{1}{3}\right]$　16. $m \leqslant 2$

四、解答题:本大题共 6 小题,共计 70 分.

17. (1) $\because$ 命题 q: $\forall x \in R, ax^2+2ax-4<0$ 恒成立

①当 $a=0$ 时, $-4<0$ 成立 ······ 1 分

②当 $a \neq 0$ 时 $\begin{cases} a<0 \\ \Delta=4a^2+16a<0 \end{cases}$ $\therefore -4<a<0$ ······ 3 分

综上 $-4<a \leqslant 0$ ······ 5 分

(2) $\because p$ 为真 $\therefore 0<a-2m<1$, $\therefore 2m<a<2m+1$ ······ 7 分

$\because p$ 真是 q 真成立的充分不必要条件

$\therefore \begin{cases} 2m \geqslant -4 \\ 2m+1 \leqslant 0 \end{cases}$ ······ 9 分

$\therefore -2 \leqslant m \leqslant -\frac{1}{2}$ ······ 10 分

18. (1) 由图可得 $A=2$. ······ 1 分

$\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$, $\therefore T=\pi$, $\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=2$. ······ 2 分

$\because f(x)$ 的图象经过 $B(\frac{5\pi}{12},2)$, $\therefore 2\sin(\frac{5\pi}{6}+\varphi)=2$,

$\therefore \frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z, \therefore \varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$

$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}, \therefore \varphi=-\frac{\pi}{3}$ ………………………………………………………… 4 分

$\therefore f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ ………………………………………………………… 5 分

(2) $g(x)=f(tx)=2\sin(2tx-\frac{\pi}{3})$ ………………………………………………… 6 分

$\because \frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}, \therefore \frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}<2tx-\frac{\pi}{3}<\pi t-\frac{\pi}{3}$

$\because g(x)$在$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$上单调递增

$\therefore \begin{cases}\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \pi t-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}t\geqslant 3k-\frac{1}{4}\\ t\leqslant 2k+\frac{5}{6}\end{cases}, k\in Z$ ………………………………………… 8 分

$\because 2k+\frac{5}{6}\geqslant 3k-\frac{1}{4} \therefore k\leqslant\frac{13}{12}$

又 $t>0 \therefore 2k+\frac{5}{6}>0, \therefore k>-\frac{5}{12}$

$\because k\in Z, \therefore k=0,1$ ………………………………………………………………… 9 分

$k=0$ 时, $0<t\leqslant\frac{5}{6}$ ………………………………………………………………… 10 分

$k=1$ 时, $\frac{11}{4}\leqslant t\leqslant\frac{17}{6}$ ………………………………………………………… 11 分

综上 $0<t\leqslant\frac{5}{6}$ 或 $\frac{11}{4}\leqslant t\leqslant\frac{17}{6}$ ………………………………………………… 12 分

19. (1) 选①由正弦定理得 $\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin C\cos A$ …………………………… 2 分

$\because \triangle ABC$ 中, $\sin C>0, \therefore \sqrt{3}\sin A-\cos A=1$,

$\therefore 2\sin(A-\frac{\pi}{6})=1$,

$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………… 4 分

$\because -\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$

$\therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}, \therefore A=\frac{\pi}{3}$ ………………………………………… 5 分

选②由正弦定理得 $a^2-b^2=c^2-bc$ ………………………………………… 2 分

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$ ………………………………………… 4 分

$\because 0<A<\pi \therefore A=\frac{\pi}{3}$ ………………………………………… 5 分

选③$\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\frac{\sqrt{3}\tan B\tan C-\sqrt{3}}{1-\tan B\tan C}=-\sqrt{3}$ ………………………………………… 2 分

$\therefore \tan A=-\tan(B+C)=\sqrt{3}$ ………………………………………… 4 分

$\because 0<A<\pi \therefore A=\frac{\pi}{3}$ ………………………………………… 5 分

(2)由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$

$\therefore b=2\sin B, c=2\sin C$ ………………………………………… 7 分

$C_{\triangle ABC}=a+b+c=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin C=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin(B+\frac{\pi}{3})$

$=\sqrt{3}+3\sin B+\sqrt{3}\cos B=2\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}$ ………………………………………… 9 分

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形

$\therefore \begin{cases} 0<B<\frac{\pi}{2} \\ 0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\therefore \frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$ ………………………………………… 10 分

$\therefore \frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(B+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$ ………………………………………… 11 分

$\therefore 3+\sqrt{3}<C_{\triangle ABC}\leqslant 3\sqrt{3}$ ………………………………………… 12 分

20. (1) $f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$ ………………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

………………………………………………………………………… 3 分

$f(x)_{极小值}=f(0)=0$，$f(x)_{极大值}=f(2)=\dfrac{4}{e^2}$ ………………………………………… 5 分

(2) 由题 $f(x_1)_{\max}\leqslant g(x_2)$

由 (1) 可知 $f(x_1)$ 在 $[-1,0]$ 单调递减

$\therefore f(x_1)_{\max}=f(-1)=e$ ………………………………………………………… 7 分

$\therefore \ln x_2-ax_2+e\geqslant e$ 在 $x_2\in[2,e^2]$ 有解，$a\leqslant\dfrac{\ln x_2}{x_2}$ ………………………………… 8 分

令 $h(x_2)=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$，$x_2\in[2,e^2]$

令 $h'(x_2)=\dfrac{1-\ln x_2}{x_2^2}=0$，$x_2=e$ ………………………………………………… 9 分

x_2	2	$(2,e)$	e	(e,e^2)	e^2
$h'(x_2)$		$+$	0	$-$	
$h(x_2)$	$\dfrac{\ln 2}{2}$	单调递增	极大值 $\dfrac{1}{e}$	单调递减	$\dfrac{2}{e^2}$

………………………………………………………………………… 11 分

$\therefore a\leqslant\dfrac{1}{e}$ ………………………………………………………………… 12 分

21. (1) 由题可得 $OD=1$，$\angle OCD=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle ODC=\dfrac{\pi}{3}-\theta$，

在 $\triangle COD$ 中，$\dfrac{OC}{\sin\angle ODC}=\dfrac{CD}{\sin\theta}=\dfrac{OD}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ……………………………… 1 分

$OC=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$，$CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，……3 分

扇形 BOD 中 $\overset{\frown}{BD}=\theta$ ……4 分

$\therefore y=2a\cdot OC+a\cdot CD+a\cdot \overset{\frown}{BD}$

$=\left[\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\theta\right]\cdot a$

$=(2\cos\theta+\theta)\cdot a, 0<\theta<\frac{\pi}{3}$ ……6 分

(2) $y'=(-2\sin\theta+1)\cdot a$ ……7 分

令 $y'=0$，则 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{3}$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ ……8 分

θ	$(0,\frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$
y'	+	0	-
y	单调递增	极大值	单调递减

……10 分

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$y_{\max}=(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6})\cdot a=(\sqrt{3}+\frac{\pi}{6})a$（百元）……11 分

答：当 θ 为 $\frac{\pi}{6}$ 时，费用 y 最大，最大值为 $(\sqrt{3}+\frac{\pi}{6})a$ 百元. ……12 分

22. (1) 定义域为 **R**

$f'(x)=e^x-m$ ……1 分

①$m\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ $\therefore f(x)$ 在 **R** 上单调递增……2 分

②$m>0$ 时，令 $f'(x)>0$，$\therefore x>\ln m$

令 $f'(x)<0$，$\therefore x<\ln m$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$ 单调递减，$(\ln m,+\infty)$ 单调递增 ……4 分

综上：$m\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 **R** 上单调递增

$m>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$ 单调递减，$(\ln m,+\infty)$ 单调递增 ……5 分

(2) 由题得 $e^x+\sin x-ax-1\geqslant 0$ 对 $\forall x>0$ 恒成立

令 $h(x)=e^x+\sin x-ax-1,x>0$

$h'(x)=e^x+\cos x-a$

$h''(x)=e^x-\sin x$

$\because x>0\therefore e^x>1,\sin x\in[-1,1]$

$h''(x)>0$ 恒成立$\therefore h'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增

$\therefore h'(x)>h'(0)=2-a$ ………………………………………………………………… 7 分

①$a\leqslant 2$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增

$\therefore h(x)>h(0)=e^0-1=0$ 恒成立

$\therefore a\leqslant 2$ ……………………………………………………………………………… 9 分

②$a>2$ 时,$h'(0)=2-a<0,h'(\ln(2+a))=2+\cos(\ln(2+a))>0$

$\because h'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增$\therefore \exists x_0\in(0,\ln(2+a))$使 $h'(x)=0$

当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$

$\because h(x)$在$(0,x_0)$单调递减，$(x_0,+\infty)$单调递增

$\therefore \exists x_0$ 使 $h(x_0)<h(0)=0$

$\therefore a>2$ 不符合 ……………………………………………………………………… 11 分

综上 $a\leqslant 2$ ……………………………………………………………………………… 12 分