高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=\frac{1+i}{3+i}$（i 为虚数单位），则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{y|y=3^{2x}-1\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$

A. $[-1,2)$　　B. $(-2,-1]$　　C. $(-1,2)$　　D. $[-2,1)$

3. "$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$"是"$\tan\theta=1$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

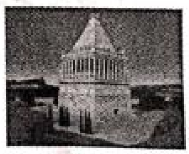
4. 某校拟从 1 200 名高一新生中采用系统抽样的方式抽取 48 人参加市"抗疫表彰大会"，如果编号为 237 的同学参加该表彰大会，那么下列编号中不能被抽到的是

A. 1 087　　B. 937　　C. 387　　D. 327

5. 若单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. π

6. 摩索拉斯陵墓位于哈利卡纳索斯，在土耳其（TURKEY）的西南方，建筑的底面是长为 40 米，宽为 30 米的长方形，总高 45 米，其中墩座墙高 20 米，柱高 12 米，金字塔高7 米，最顶部的马车雕像高 6 米，建筑物被墩座墙围住，旁边以石像作装饰，顶部的雕像是四匹马拉着一架古代战车. 若摩索拉斯陵墓可视为一个长方体与一个正四棱锥的组合体，且长方体的上底面与正四棱锥的底面重合，则陵墓的高与金字塔的侧棱长之比大约为（参考数据：$\sqrt{674}\approx25.962$）

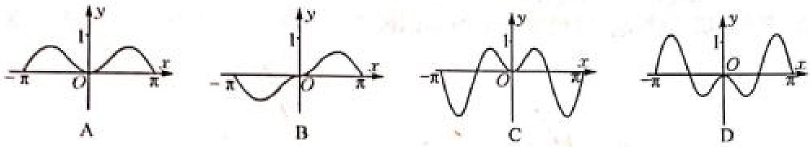


A. 2.77　　B. 2.43　　C. 1.73　　D. 1.35

7. 若 $a=\log_2 3\cdot\log_3 5$，$b=\log_{\sqrt{2}}\frac{9}{4}$，$c=2^{0.99}$，则

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

8. 函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\sin x$ 在区间$[-\pi,\pi]$上的图象大致为



A　　B　　C　　D

9. 在面积为 S 的$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $b^2+c^2=3+\frac{4S}{\tan A}$，则 $a=$

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(0<\omega<4,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=0$，则 $f(x)=$

A. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$　　C. $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

11. 点 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，横坐标为 $m(m>0)$的点 P 为抛物线 C 上一点，过点 P 且与抛物线 C 相切的直线 l 与 y 轴相交于点 Q，则 $\tan\angle FPQ=$

A. $\sqrt{m}$　　B. $\frac{\sqrt{m+1}}{2}$　　C. $\frac{1}{\sqrt{m}}$　　D. $\frac{2}{\sqrt{m+1}}$

12. 已知函数 $f(x)=x\ln x$，若对任意 $x_1>x_2>0$，$\frac{\lambda}{2}(x_1^2-x_2^2)>f(x_1)-f(x_2)$恒成立，则实数 λ 的取值范围为

A. $[1,e]$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $[e,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x,y 满足约束条件$\begin{cases}x-y-1\leqslant 0,\\x+y-1\leqslant 0,\\5x-y+7\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=-x-3y$ 的最小值为________.

14. 已知$(2-x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，则 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=$________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为 F，A 为双曲线 C 的右顶点，过点 F 作 x 轴的垂线，与双曲线 C 交于 P，若直线 AP 的斜率是双曲线 C 的一条渐近线斜率的$\sqrt{3}$倍，则双曲线 C 的离心率为________.

16. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，且$\angle APB=60^\circ$，当$\triangle PAB$ 的面积最大时，四棱锥 $P-ABCD$ 的高为________，四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为________.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令 $b_n=\frac{4}{4-a_n^2}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.(本小题满分 12 分)

如图 1 中,多边形 $ABCDE$ 为平面图形,其中 $AB=AE=\sqrt{3}$,$BE=BC=2$,$CD=4$,$BE\parallel CD$,$BC\perp CD$,将$\triangle ABE$ 沿 BE 边折起,得到如图 2 所示四棱锥 $P-BCDE$,其中点 P 与点 A 重合.

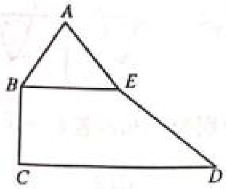


图1

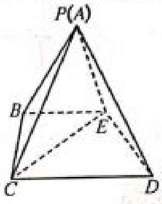


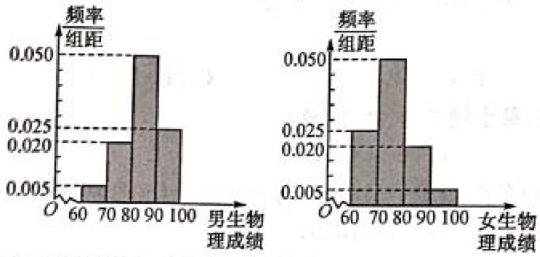
图2

(1)当 $PD=\sqrt{11}$ 时,求证:$DE\perp$平面 PCE;

(2)当二面角 $P-BE-C$ 为$135°$时,求平面 PBE 与平面 PCD 所成二面角的正弦值.

19.(本小题满分 12 分)

某校为了调研学情,在期末考试后,从全校高一学生中随机选取了 20 名男学生和 20 名女学生,调查分析学生的物理成绩.为易于统计分析,将 20 名男学生和 20 名女学生的物理成绩,分成如下四组:[60,70),[70,80),[80,90),[90,100],并分别绘制了如下图所示的频率分布直方图:



规定:物理成绩不低于 80 分的为优秀,否则为不优秀.

(1)根据这次抽查的数据,填写下列的 2×2 列联表;

	优秀	不优秀	合计
男生			
女生			
合计			

(2)根据(1)中的列联表,试问能否在犯错误的概率不超过 1%的前提下,认为物理成绩优秀与性别有关?

(3)用样本估计总体,将频率视为概率.在全校高一学生中随机抽取 8 名男生和 8 名女生,记“8 名男生中恰有 $n(1<n<8)$名物理成绩优秀”的概率为 P_1,“8 名女生中恰有 $n(1<n<8)$名物理成绩优秀”的概率为 P_2,试比较 P_1 与 P_2的大小,并说明理由.

附:临界值参考表与参考公式

$P(K^2\geqslant K_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
K_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

($K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$)

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_2 且垂直于 x 轴的直线与 C 交于 M,N 两点,且 M 的坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)过 F_2 作与直线 MN 不重合的直线 l 与 C 相交于 P,Q 两点,若直线 PM 和直线 QN 相交于点 T,求证:点 T 在定直线上.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-2a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $\ln x_1-\ln x_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$,求证:$x_1>x_2+2$.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数).以原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴,且两个坐标系取相等的长度单位,建立极坐标系.

(1)求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程;

(2)已知 A 是曲线 C 上一点,B 是直线 l 上位于极轴所在直线上方的一点,若 $|OB|=2$,求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $a+b+c=1$.

(1)求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$;

(2)用 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a,b,c 的最大值,求 $\max\{a+b,b+c,c+a\}$ 的最小值.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　$z=\frac{1+i}{3+i}=\frac{(1+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{4+2i}{10}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$，所以复数 z 在复平面内对应的点位于第一象限. 故选 A.

2. B　由 $B=\{y|y>-1\}$，得 $\complement_U B=(-\infty,-1]$，所以 $A\cap(\complement_U B)=(-2,-1]$. 故选 B.

3. A　由 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\tan\theta=\tan\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$；由 $\tan\theta=1$，得 $\theta=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$. 故选 A.

4. D　依据题意，抽样间隔为 25，又 237 除以 25 的余数为 12，故所抽取的编号为 $12+25k$（$k=0,1,\cdots,47$），所以 327 不符合. 故选 D.

5. B　由 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，得 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

6. C　金字塔的侧棱长为 $\sqrt{7^2+25^2}=\sqrt{674}$，则陵墓的高与金字塔的侧棱长之比大约为 $\frac{45}{\sqrt{674}}\approx1.73$，故选 C.

7. C　$a=\log_2 5>2$，$b=\log_2\frac{81}{16}>\log_2\frac{80}{16}=\log_2 5=a$，$c<2$，有 $c<a<b$. 故选 C.

8. A　由 $f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\cdot\sin(-x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\sin x=f(x)$，可知 $f(x)$ 为偶函数，又由当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\sin x\geqslant0$. 故选 A.

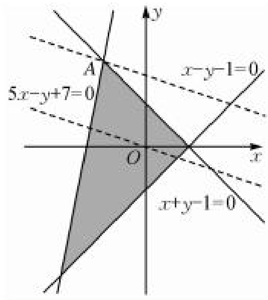
9. B　由三角形的面积公式，得 $b^2+c^2=3+\frac{2bc\sin A}{\tan A}$，即 $b^2+c^2=3+2bc\cos A$，由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3$，所以 $a=\sqrt{3}$. 故选 B.

10. A　由题意有 $\begin{cases}\frac{\pi\omega}{12}+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{7\pi\omega}{12}+\varphi=k_2\pi\end{cases}$ $(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$，两式作差得 $\frac{\pi\omega}{2}=(k_2-k_1)\pi(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$，有 $\omega=2(k_2-k_1)(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$，又 $0<\omega<4$，所以 $\omega=2$，$\varphi=k_1\pi-\frac{\pi}{6}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，故 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 故选 A.

11. C　由抛物线的对称性，不妨设点 P 位于第一象限，可得点 P 的坐标为 $(m,2\sqrt{m})$，设直线 l 的方程为 $y=k(x-m)+2\sqrt{m}$，联立方程 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=k(x-m)+2\sqrt{m},\end{cases}$ 消去 x 后整理为 $ky^2-4y+8\sqrt{m}-4km=0$，有 $\Delta=16-4k(8\sqrt{m}-4km)=0$，有 $mk^2-2\sqrt{m}k+1=0$，解得 $k=\frac{1}{\sqrt{m}}$，可得直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{\sqrt{m}}x+\sqrt{m}$，令 $y=0$，得 $x=-m$，直线 l 与 x 轴的交点 D 的坐标为 $(-m,0)$，所以 $|DF|=1+m$，又 $|PF|=m+1$，所以 $|PF|=|DF|$，所以 $\angle FPQ=\angle FDP$，所以 $\tan\angle FPQ=\tan\angle FDP=k=\frac{1}{\sqrt{m}}$. 故选 C.

12. D　由$\frac{\lambda}{2}(x_1^2-x_2^2)>f(x_1)-f(x_2)$，得$\frac{\lambda}{2}x_1^2-x_1\ln x_1>\frac{\lambda}{2}x_2^2-x_2\ln x_2$. 令$g(x)=\frac{\lambda}{2}x^2-x\ln x$，则问题可以转化为：对任意$x_1>x_2>0$，$g(x_1)>g(x_2)$恒成立，即函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为$g'(x)=\lambda x-\ln x-1$，所以转化为$g'(x)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，因为$x\in(0,+\infty)$，所以$\lambda\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立，即转化为$\lambda\geqslant\left[\frac{\ln x+1}{x}\right]_{\max}$. 令$h(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，则$h'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$，所以当$x\in(0,1)$时，$h'(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$h(x)_{\max}=h(1)=1$，所以$\lambda\geqslant 1$. 故选 D.

13. -5　画出可行域（如图阴影部分），当直线$z=-x-3y$过点$A(-1,2)$时，z取得最小值，z的最小值为-5.



14. -10　对$(2-x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$两边分别求导，得$-10(2-x)^9=a_1+2a_2x+\cdots+10a_{10}x^9$，令$x=1$，得$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=-10$.

15. 2　设焦点F的坐标为$(c,0)$，双曲线C的离心率为e，不妨设点P位于第一象限，可求得点P的坐标为$\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，点$A$的坐标为$(a,0)$，直线$AP$的斜率为$\frac{\frac{b^2}{a}}{c-a}=\frac{c^2-a^2}{a(c-a)}=\frac{c+a}{a}=e+1$，又由$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{e^2-1}$，有$e+1=\sqrt{3(e^2-1)}$，整理为$e^2-e-2=0$，解得$e=2$或$e=-1$（舍）.

16. $\sqrt{3}$　$\frac{28\pi}{3}$　点P在以弦$AB=2$，所对的圆周角为60°的优弧APB上运动，作$PH\perp AB$，H为垂足，由侧面$PAB\perp$底面$ABCD$，得$PH\perp$底面$ABCD$. 当H为AB的中点时，$\triangle PAB$为等边三角形，此时$\triangle PAB$的面积最大，且$PH=\sqrt{3}$，即四棱锥$P-ABCD$的高为$\sqrt{3}$. 设等边$\triangle PAB$的中心为O_1，正方形$ABCD$的中心为O_2，过O_1、O_2分别作平面PAB、平面$ABCD$的垂线，且交于点O，则O为四棱锥$P-ABCD$外接球的球心，显然$R=\sqrt{O_2O^2+O_2A^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$，于是四棱锥$P-ABCD$外接球的表面积为$4\pi\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=\frac{28\pi}{3}$.

17. 解：(1)因为$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n+1}{a_n}-\frac{1}{a_n}=1$，又$\frac{1}{a_1}=1$，………… 3 分

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列. ………… 4 分

所以$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)=n$，得$a_n=\frac{1}{n}$，

即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$. ………… 6 分

(2)由(1)，得$b_n=\frac{4}{4-a_n^2}=\frac{4}{4-\frac{1}{n^2}}=\frac{4n^2}{4n^2-1}=\frac{4n^2-1+1}{4n^2-1}=1+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，……… 9 分

则$S_n=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$. ………… 12 分

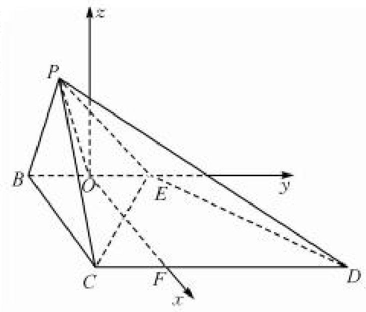
18.(1)证明：由 $BE/\!/CD$，$BC\perp CD$，$BE=BC=2$，$CD=4$，易求 $CE=DE=2\sqrt{2}$，所以 $CE^2+DE^2=CD^2$，所以 $DE\perp CE$. ……… 2分

因为 $PE=\sqrt{3}$，$PD=\sqrt{11}$，所以 $DE^2+PE^2=11=PD^2$，所以 $DE\perp PE$.

又 $PE\cap CE=E$，$PE,CE\subset$平面 PCE，

所以 $DE\perp$平面 PCE. ……………………………………………………………… 5分

(2)解：取 BE 的中点 O，过点 O 在平面 $BCDE$ 内作 BE 的垂线交 CD 于 F，以直线 OF 作为 x 轴，直线 OE 为 y 轴，过点 O 作平面 $BCDE$ 的垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系，则 $O(0,0,0)$，$B(0,-1,0)$，$E(0,1,0)$，$C(2,-1,0)$，$D(2,3,0)$.



……………………………………………………………… 6分

因为 $PB=PE$，O 为 BE 的中点，所以 $PO\perp BE$，又 $BE\perp OF$，所以 $\angle POF=135°$.

在$\triangle PBE$ 中，$PE=\sqrt{3}$，$BE=2$，所以 $PO=\sqrt{2}$，所以 $P(-1,0,1)$，

所以$\overrightarrow{OE}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{OP}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{CD}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-3,1,1)$. ……………………………… 8分

设平面 PBE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由$\overrightarrow{OE}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{OP}=(-1,0,1)$，有$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OE}=y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OP}=-x+z=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}y=0,\\ z=x,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$； ……………… 9分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

由$\overrightarrow{CD}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-3,1,1)$，有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=4b=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=-3a+b+c=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b=0,\\ c=3a,\end{cases}$ 令 $a=1$，

得 $\boldsymbol{n}=(1,0,3)$，……………………………………………………………… 10分

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=4$，$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{10}$，$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

故平面 PBE 与平面 PCD 所成二面角的正弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………… 12分

19.解：(1)列出 2×2 列联表，如下：

	优秀	不优秀	合计
男生	15	5	20
女生	5	15	20
合计	20	20	40

……………………………………………………………… 3分

(2)$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{40(15\times15-5\times5)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$，

所以能在犯错误的概率不超过 1%的前提下，认为物理成绩优秀与性别有关. ……………… 6分

(3)根据频率分布直方图,可得男生物理成绩优秀的概率为 $0.5+0.25=0.75=\frac{3}{4}$,

女生物理成绩优秀的概率为 $0.2+0.05=0.25=\frac{1}{4}$. ………………………………………… 7 分

设"8 名男生中物理成绩优秀"的人数为随机变量 ξ,"8 名女生中物理成绩优秀"的人数为随机变量 η,根据题意,得

$\xi\sim B\left(8,\frac{3}{4}\right)$,$\eta\sim B\left(8,\frac{1}{4}\right)$, ………………………………………… 8 分

则 $P_1=C_8^n\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(1-\frac{3}{4}\right)^{8-n}=C_8^n\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{1}{4}\right)^{8-n}=\frac{C_8^n\cdot 3^n}{4^8}$,$P_2=C_8^n\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-n}=C_8^n\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{8-n}=$

$\frac{C_8^n\cdot 3^{8-n}}{4^8}$,$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{C_8^n\cdot 3^n}{4^8}}{\frac{C_8^n\cdot 3^{8-n}}{4^8}}=3^{2n-8}$. ………………………………………… 10 分

当 $n=4$ 时,$3^{2n-8}=1$,于是 $P_1=P_2$;

当 $1<n<4$ 时,$3^{2n-8}<1$,于是 $P_1<P_2$;

当 $4<n<8$ 时,$3^{2n-8}>1$,于是 $P_1>P_2$. ………………………………………… 12 分

20.(1)解:由题意,得 $F_2(1,0)$,$F_1(-1,0)$,且 $c=1$, ………………………………………… 1 分

则 $2a=|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{(-1-1)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}+\frac{3}{2}=4$,即 $a=2$, ………………………… 2 分

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$, ………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4 分

(2)证明:由(1)及 C 的对称性,得点 N 的坐标为 $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, ………………………………………… 5 分

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,点 P、Q 的坐标分别为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 消去 y 后整理为 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,

所以 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$. ………………………………………… 6 分

直线 PM 的斜率为 $\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}=\frac{k(x_1-1)-\frac{3}{2}}{x_1-1}=k-\frac{3}{2x_1-2}$,

直线 PM 的方程为 $y-\frac{3}{2}=\left(k-\frac{3}{2x_1-2}\right)(x-1)$,

直线 QN 的斜率为 $\frac{y_2+\frac{3}{2}}{x_2-1}=\frac{k(x_2-1)+\frac{3}{2}}{x_2-1}=k+\frac{3}{2x_2-2}$,

直线 QN 的方程为 $y+\frac{3}{2}=\left(k+\frac{3}{2x_2-2}\right)(x-1)$, ………………………………………… 8 分

将直线 PM 和直线 QN 方程作差消去 y 后整理为 $\left(\frac{3}{2x_1-2}+\frac{3}{2x_2-2}\right)(x-1)=3$，

可得 $\left(\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}\right)(x-1)=2$，…………………………………… 9 分

而由 $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}=\frac{x_1+x_2-2}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=\frac{\frac{8k^2}{4k^2+3}-2}{\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}+1}=\frac{2}{3}$，

可得 $\frac{2}{3}(x-1)=2$，解得 $x=4$，即直线 PM 和 QN 的交点 T 的横坐标恒为 4，…………………… 11 分

所以点 T 在定直线 $x=4$ 上. …………………………………… 12 分

21.(1)解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x}=\frac{x^2-2ax+1}{x^2}$. …………………… 1 分

令 $g(x)=x^2-2ax+1$，方程 $x^2-2ax+1=0$ 的判别式 $\Delta=4a^2-4=4(a+1)(a-1)$，

(ⅰ)当 $\Delta\leqslant0$，即 $-1\leqslant a\leqslant1$ 时，$g(x)=x^2-2ax+1\geqslant0$ 恒成立，即对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\geqslant0$，所以

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………… 2 分

(ⅱ)当 $\Delta>0$，即 $a<-1$ 或 $a>1$.

①当 $a<-1$ 时，$g(x)=x^2-2ax+1>0$ 恒成立，即对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………… 3 分

②当 $a>1$ 时，由 $x^2-2ax+1=0$，解得 $\alpha=a-\sqrt{a^2-1}$，$\beta=a+\sqrt{a^2-1}$. 所以当 $0<x<\alpha$ 时，$g(x)>0$；当 $\alpha<x<\beta$ 时，$g(x)<0$；当 $x>\beta$ 时，$g(x)>0$，所以在 $(0,a-\sqrt{a^2-1})\cup(a+\sqrt{a^2-1},+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，在 $(a-\sqrt{a^2-1},a+\sqrt{a^2-1})$ 上，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,a-\sqrt{a^2-1})$ 和 $(a+\sqrt{a^2-1},+\infty)$ 上单调递增；在 $(a-\sqrt{a^2-1},a+\sqrt{a^2-1})$ 上单调递减. …………………………………… 6 分

综上，当 $a\leqslant1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a-\sqrt{a^2-1})$ 和 $(a+\sqrt{a^2-1},+\infty)$ 上单调递增，在 $(a-\sqrt{a^2-1},a+\sqrt{a^2-1})$ 上单调递减. …………………………………… 7 分

(2)证明：由 $\ln x_1-\ln x_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，得 $\ln x_1-\ln x_2>0$，所以 $x_1>x_2>0$，…………………… 8 分

因为 $\ln x_1-\ln x_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，所以 $\ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{\frac{x_1}{x_2}+1}{x_1}$，令 $\frac{x_1}{x_2}=t$，则 $t>1$，$\ln t=\frac{t+1}{x_1}$，

所以 $x_1=\frac{t+1}{\ln t}$，$x_2=\frac{t+1}{t\ln t}$，

所以 $x_1-x_2=\frac{t^2-1}{t\ln t}$. …………………………………… 10 分

所以要证 $x_1>x_2+2$，只要证 $\frac{t^2-1}{t\ln t}>2$，即证 $t-\frac{1}{t}>2\ln t(t>1)$. …………………… 11 分

由(1)可知，当 $a=1$ 时，所以 $f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

所以，当 $t>1$ 时，$f(t)>f(1)=0$，即 $t-\frac{1}{t}>2\ln t(t>1)$ 成立，

所以 $x_1>x_2+2$ 成立. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 l 的参数方程得 l 的普通方程为 $y=-\sqrt{3}x$，所以 l 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$，所以直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{2\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$； ………………………………………………………… 2 分

由曲线 C 的参数方程得 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，又 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. ……… 4 分

(2) 由 $|OB|=2$，则 B 的极坐标为 $\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$.

设 $A(\rho,\theta)\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times2\times2\cos\theta\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$

$=2\cos\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=\sqrt{3}\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta$

$=\sqrt{3}\times\frac{1+\cos2\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin2\theta=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 8 分

当 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时，$(S_{\triangle AOB})_{\max}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 10 分

23. (1)证明：因为 $2ab\leqslant a^2+b^2$(当且仅当 $a=b$ 时等号成立)，$2bc\leqslant b^2+c^2$(当且仅当 $b=c$ 时等号成立)，$2ca\leqslant c^2+a^2$(当且仅当 $c=a$ 时等号成立)，

所以 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\leqslant a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=3(a^2+b^2+c^2)$，

由 $a+b+c=1$，得 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$ $\left(\text{当且仅当 } a=b=c=\frac{1}{3}\text{ 时等号成立}\right)$. ………………………………… 5 分

(2)解：设 $M=\max\{a+b,b+c,c+a\}$，则 $M\geqslant a+b$，$M\geqslant b+c$，$M\geqslant c+a$，

从而 $3M\geqslant2(a+b+c)=2$，即 $M\geqslant\frac{2}{3}$. ……………………………………………………… 8 分

当且仅当 $a+b=b+c=c+a$，$a+b+c=1$，即 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，

$\min\{\max\{a+b,b+c,c+a\}\}=\frac{2}{3}$. ……………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。