南京市 2022 届高三年级学情调研
数学试题解析

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-9\le 0\}$，$B=\{x\,|\,2x-4>0\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-\infty,-3]$　　B．$[-3,+\infty)$　　C．$[-3,2)$　　D．$(2,3]$

【答案】D

【解析】$A\cap B=[-3,3]\cap(2,+\infty)=(2,3]$，故选 D

2．已知 $\dfrac{a+i}{2-i}$ 是纯虚数，其中 i 是虚数单位，则实数 $a=$

A．-2　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．2

【答案】C

【解析】$\dfrac{a+i}{2-i}=\dfrac{(a+i)(2+i)}{5}=\dfrac{(2a-1)+(2+a)i}{5}$，若为纯虚数，则 $2a-1=0$，$a=\dfrac{1}{2}$，故选 C

3．“$m=1$”是“直线 $4x+3y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相切”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】由题意可知，圆心为 $(1,0)$，半径为 1，若直线和圆相切，则圆心到直线的距离为

$d=\dfrac{|4+m|}{5}=1$，$m=1,-9$，所以为充分不必要条件，所以选 A

4．已知 $\vec{a},\vec{b}$ 为单位向量，且 $(4\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+3\vec{b})$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角的余弦值为

A. $-\frac{7}{11}$　　B. $-\frac{1}{11}$　　C. $\frac{1}{11}$　　D. $\frac{7}{11}$

【答案】B

【解析】由题意可知，$(4\vec{a}-\vec{b})\bullet(\vec{a}+3\vec{b})=1+11|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$,所以$\cos\theta=-\frac{1}{11}$,故选B

5.将4名志愿者全部安排到某社区参加3项工作，每人参加1项，每项工作至少有1人参加，则不同的安排方式共有

A．24种　　B.36种　　C．60种　　D.72种

【答案】B

【解析】$C_4^2 \bullet A_3^3=36$,故选B

6.在平面直角坐标系xOy中，双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_2$且垂直于$x$轴的直线与$C$相交于$P,Q$两点，$F_1Q$与$y$轴的交点为$R$,$F_1Q\perp PR$,则$C$的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】由题意可知$PQ=PF_1$,即$\sqrt{3}\cdot\frac{b^2}{a}=2c$，故$e=\sqrt{3}$，选B

7.取一条长度为1的线段，将它三等分，去掉中间一段，留剩下的两段；再将剩下的两段分别三等分，各去掉中间一段，留剩下的更短的四段；……；将这样的操作一直继续下去，直至无穷，由于在不断分割舍弃过程中，所形成的线段数目越来越多，长度越来越小，在极限的情况下，得到一个离散的点集，称为康托尔三分集.若在第n次操作中去掉的线段长度之和不小于$\frac{1}{60}$，则n的最大值为

A.6　　B.　7　　C.8　　D.9

【答案】C

【解析】第一次操作去掉的线段长度为$\frac{1}{3}$，第二次操作去掉的线段长度之和为$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$，第三次操作去掉的线段长度之和为$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$，…，第$n$次操作去掉的线段长度之和为$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}$，

由题意可知，$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{60}$，则$\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\geqslant\frac{1}{30}$，则$n\lg\frac{2}{3}\geqslant-\lg30=-1-\lg3$，

所以$n(\lg2-\lg3)\geqslant-1-\lg3$，即$n\leqslant\frac{1+\lg3}{\lg3-\lg2}$，

又$\lg2\approx0.3010,\lg3\approx0.4771$，带入上式，可得$n\leqslant8$

8．已知$a,b,c\in(0,1)$，且$a^2-2\ln a+1=e,b^2-2\ln b+2=e^2,c^2-2\ln c+3=e^3$，其中e是自然对数的底数，则

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

【答案】A

【解析】设$f(x)=x^2-2\ln x,g(x)=e^x-x$，则$f(a)=g(1),f(b)=g(2),f(c)=g(3)$，

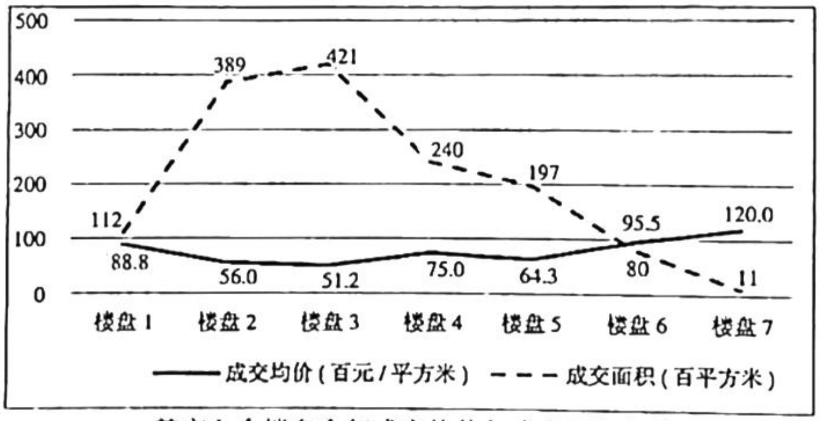
又$g'(x)=e^x-1>0(x>0)$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$g(3)>g(2)>g(1)$，即$f(c)>f(b)>f(a)$，

因为$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}<0(x\in(0,1))$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以$a>b>c$

二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分．

9．房地产市场与城市经济发展密切相关，更与百姓的生活密切相关．按照房地产市场经济理论，房屋销售量与房价有密切关系．下图是某城市过去一年中七个楼盘的新房成交均价与成交面积折线图，则下列结论中正确的是



某市七个楼盘全年成交均价与成交面积折线图

A．这七个楼盘中，每个楼盘的成交均价都在[88.8,120.0]内

B．这七个楼盘中，楼盘2的成交总额最大
C．这七个楼盘，成交面积的平均值低于200
D．这七个楼盘，成交面积与成交均价呈负相关

【答案】BD

【解析】由楼盘2,3,4,5的数据可知，A错误；

计算七个楼盘各自的成交总额可知，B正确；

成交面积的均值$\frac{112+389+421+240+197+80+11}{7}=\frac{1450}{7}>200$，C错误；

7个楼盘整体呈现均价越低，则成交面积越大的趋势，D正确.

10．已知m,n是两条不同的直线，α,β，是三个不同的平面．下列说法中正确的是

A.若$m//\alpha,m\subset\beta,\alpha\cap\beta=n$,则$m//n$　　B.若$m//n,m//\alpha$,则$n//\alpha$

C.若$\alpha\cap\beta=n,\alpha\perp\beta,\beta\perp\gamma$,则$n\perp\gamma$　　D.若$m\perp\alpha,m\perp\beta,\alpha//\gamma$,则$\beta//\gamma$

【答案】ACD

【解析】由线面平行的性质定理可知，A正确；

若$m\parallel\alpha,m\parallel n$，则$n\parallel\alpha$或$n\subseteq\alpha$，即B错误；

设α,β的法向量分别为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若$\alpha\cap\beta=n$，则$n\perp\boldsymbol{a},n\perp\boldsymbol{b}$，又$\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$，则$\boldsymbol{a}\parallel\gamma,\boldsymbol{b}\parallel\gamma$，

所以$n\perp\gamma$，即C正确；

若$m\perp\alpha,m\perp\beta$，则$\alpha\parallel\beta$，又$\alpha\parallel\gamma$，则$\beta\parallel\gamma$，即D正确.

11．设正实数x，y满足$2x+y=1$，则

A．xy的最大值是$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$的最小值是9

C．$4x^2+y^2$的最小值为$\frac{1}{2}$　　D．$\sqrt{2x}+\sqrt{y}$的最大值为2

【答案】BC

【解析】因为$2x+y=1\geqslant2\sqrt{2xy}$，所以$xy\leqslant\frac{1}{8}$，A错误；

$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(2x+y)=5+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant5+2\sqrt{4}=9$，B正确；

$4x^2+y^2\geqslant\frac{(2x+y)^2}{2}=\frac{1}{2}$，即 C 正确；

$1=2x+y\geqslant\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)^2}{2}$，所以$\sqrt{2x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{2}$，即 D 错误.

12. 已知 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数，且当 $0\le x\le 2$ 时，$f(x)=\begin{cases}x,0\le x\le 1\\2-x,1<x\le 2\end{cases}$，设 $g(x)=f(x)+f(x+1)$，则

A.函数 $y=g(x)$为周期函数　　　　B.函数 $y=g(x)$的最大值为 2

C.函数 $y=g(x)$在区间$(7,8)$上单调递增　　D.函数 $y=g(x)$的图像既有对称轴又有对称中心

【答案】ACD

【解析】由 $f(x+4)=f(x)$，所以 $g(x+4)=f(x+4)+f(x+5)=f(x)+f(x+1)=g(x)$，A 正确；易知 $f(x)\leqslant f(1)=1$，所以 $f(x)+f(x+1)\leqslant 2$，又 $f(x)=1$ 与 $f(x+1)=1$不能同时取等，所以 $g(x)<2$，B 错误；当 $x\in(7,8)$ 时，$x-8\in(-1,0),x-7\in(0,1)$，所以 $g(x)=g(x-8)=f(x-8)+f(x-7)$，所以 $g(x)=-f(8-x)+f(x-7)=-(8-x)+x-7=2x-15$，单调递增，C 正确；作图可知，$g(x)$关于 $x=\frac{1}{2}$成轴对称，关于$\left(-\frac{1}{2},0\right)$成中心对称，D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.将函数 $y=\cos x$ 的图像向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度，所得图像与 $y=\sin x$ 的图像重合，则φ的一个可能的值为________.（写出一个正确答案即可）

【答案】$\frac{\pi}{2}$（满足即可）

【解析】因为 $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\varphi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$满足.

14. 已知$\left(1+\frac{1}{2}x\right)^n(n\in N^*)$的展开式中 x^2 的系数是 7，则 $n=$________；若 x^r 与 x^{r+1} $(r\in N)$的

系数相等，则 $r=$________.

【答案】8; 2

【解析】由题意，$C_n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=7$，则 $n(n-1)=56$，解得 $n=8$，

由 $C_8^r\left(\frac{1}{2}\right)^r=C_8^{r+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}$，可得 $2C_8^r=C_8^{r+1}$，即 $\frac{2\times 8!}{r!(8-r)!}=\frac{8!}{(r+1)!(7-r)!}$，即 $\frac{2}{8-r}=\frac{1}{r+1}$，

解得 $r=2$.

15. 如图1所示，抛物面天线是指由抛物面（抛物线绕其对称轴旋转形成的曲面）反射器和位于其焦点上的照射器（馈源，通常采用喇叭天线）组成的单反射面型天线，广泛应用于微波和卫星通讯等，具有结构简单、方向性强、工作频带宽等特点. 图2是图1的轴截面，A，B 两点关于抛物线的对称轴对称，F 是抛物线的焦点，$\angle AFB$ 是馈源的方向角，记为 θ. 焦点 F 到顶点的距离 f 与口径 d 的比值 $\frac{f}{d}$ 称为抛物面天线的焦径比，它直接影响天线的效率与信噪比等. 如果某抛物面天线的焦径比等于 0.5，那么馈源方向角 θ 的正切值为________.

图1

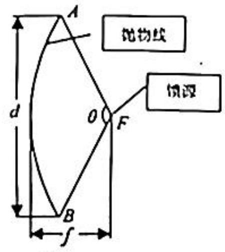


图2

【答案】$-\frac{24}{7}$

【解析】设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，则 $f=\frac{p}{2}$，又 $\frac{f}{d}=0.5$，所以 $d=p$，

所以 $A\left(\frac{p}{8},\frac{p}{2}\right),B\left(\frac{p}{8},-\frac{p}{2}\right)$，直线 BF 的斜率 $k=\frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}-\frac{p}{8}}=\frac{4}{3}$，

所以 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{4}{3}$，所以 $\tan\theta=\frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}=-\frac{24}{7}$.

16. 在三棱锥$P-ABC$中，ΔABC和ΔPBC都是边长为$2\sqrt{3}$的正三角形，$PA=3\sqrt{2}$. 若M为三棱锥$P-ABC$外接球上的动点，则点M到平面ABC距离的最大值为________.

【答案】$\sqrt{5}+1$

【解析】设BC中点为T，$\triangle ABC$的外心为O_1，$\triangle PBC$的外心为O_2，球心为O，

易知$PT=AT=3$，又$PA=3\sqrt{2}$，所以$PT\perp AT$，所以平面$PBC\perp$平面ABC，

所以四边形OO_1TO_2是边长为1的正方形，所以外接球半径$R=\sqrt{OO_2^2+O_2P^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，

M到平面ABC的距离$d\leqslant R+OO_1=\sqrt{5}+1$.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分10分）

已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_3=7a_1$，且a_1，a_2+2，a_3成等差数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\begin{cases}a_n, & n\text{为奇数}\\ n, & n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}$.

【解析】(1)因为$S_3=7a_1$，所以$1+q+q^2=7$，

解得$q=2,q=-3$（舍）；

又a_1，a_2+2，a_3成等差数列，

所以2（a_2+2）$=a_1+a_3$，解得$a_1=4$，

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n+1}$.

(2)因为$b_n=\begin{cases}a_n, & n\text{为奇数}\\ n, & n\text{为偶数}\end{cases}$，

所以$T_{2n}=(2+4+6+\ldots+2n)+(4+16+64+\ldots+2^{2n})=\dfrac{4^{n+1}-4}{3}+n(n+1)$.

18.（本小题满分 12 分）

请在① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$；② $\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$；③ $a+b=5$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\sin(A-C)+\sin B=\sin A$，$c=2$，________，若该三角形存在，求该三角形的面积；若该三角形不存在，请说明理由.

【解析】选③，

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin\left(\pi-(A+C)\right)=\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，

又 $\sin\left(A-C\right)=\sin A\cos C-\sin C\cos A$，所以 $\sin\left(A-C\right)+\sin B=2\sin A\cos C$；

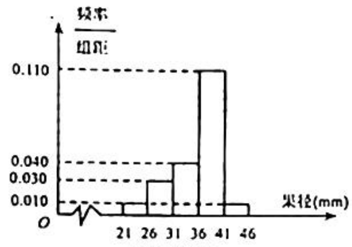
又 $\sin\left(A-C\right)+\sin B=\sin A$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，即 $C=\frac{\pi}{3}$，

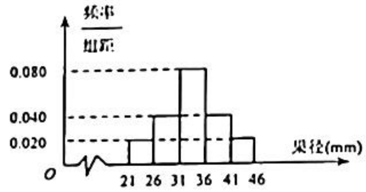
因为 $c=2$，由余弦定理可知，$4=a^2+b^2-2ab\cos C=\left(a+b\right)^2-3ab$，

即 $\left(a+b\right)^2-4=3ab\leqslant\frac{3\left(a+b\right)^2}{4}$，所以 $a+b\leqslant 4$，

即 $a+b=5$ 不可能成立，该三角形不存在.

19. 科研小组为提高某种水果的果径，设计了一套实验方案，并在两片果园中进行对比实验，其中实验园采用实验方案，对照园未采用. 实验周期结束后，分别在两片果园中各随机选取 100 个果实，按果径分成 5 组进行统计：$[21,26)$，$[26,31)$，$[31,36)$，$[36,41)$，$[41,46]$（单位：mm）. 统计后分别制成如下的频率分布直方图，并规定果径达到 $36mm$ 及以上的为“大果”.





（1）请根据题中信息完成下面的列联表，并判断是否有99.9%的把握认为“大果”与“采用实验方案”有关；

	采用实验方案	未采用实验方案	合计
大果			
非大果			
合计	100	100	200

（2）根据长期种植经验，可以认为对照园中的果径 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$，$\sigma\approx5.5$，请估计对照园中果径落在区间 $(39,50)$ 内的概率．（同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表）

附：① $x^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(x^2\geq x_0)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
x_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

②若 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.683$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.954$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.997$

【解析】（1）列联表如下：

	采用实验方案	未采用实验方案	合计
大果	60	30	90
非大果	40	70	110

合计	100	100	200

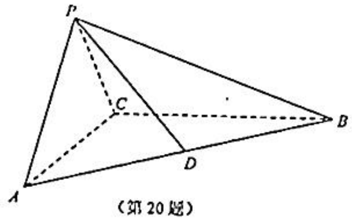
$\chi^2=\dfrac{200(60\times70-30\times40)^2}{100\times100\times90\times110}=\dfrac{200}{11}>10.828$，所以有99.9%的把握认为两者有关；

（2）由题中数据，$\overline{x}=23.5\times0.1+28.5\times0.2+33.5\times0.4+38.5\times0.2+43.5\times0.1=33.5$，

则$P(39<X<50)=P(\mu+\sigma<X<\mu+3\sigma)=\dfrac{0.997-0.683}{2}=0.157$.

20.（本小题满分12分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AC=2$，$BC=4$，ΔPAC为正三角形，D为AB的中点，$AC\perp PD$，$\angle PCB=90°$.



（第20题）

（1）求证：$BC\perp$平面PAC；

（2）求PD与平面PBC所成角的正弦值.

【解析】（1）证明：作AC的中点O，连接OD,OP，

因为$\triangle PAC$是正三角形，所以$OP\perp AC$，

又$AC\perp PD,PD\cap OP=P,PD,OP\subset$平面$POD$，所以$AC\perp$平面$POD$，

又$OD\subset$平面POD，所以$AC\perp OD$，

因为$OD\parallel BC$，所以$AC\perp BC$，

又$PC\perp BC,PC\cap AC=C,PC,AC\subset$平面$PAC$，所以$BC\perp$平面$PAC$；

（2）以$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OP}\}$为$x,y,z$轴非负半轴，建立空间直角坐标系，

则$C(-1,0,0),D(0,2,0),B(-1,4,0),P(0,0,\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{CP}=(1,0,\sqrt{3}),\overrightarrow{CB}=(0,4,0),\overrightarrow{PD}=(0,2,-\sqrt{3})$，

设平面PBC的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=x+\sqrt{3}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=4y=0\end{cases}$，取$x=\sqrt{3}$，

则$\vec{m}=(\sqrt{3},0,-1)$，

设 PD 与平面 PBC 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{PD}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PD}\right|}=\dfrac{\left|\sqrt{3}\right|}{\sqrt{4+3}\cdot\sqrt{3+1}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

21.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B．F 是椭圆 C 的右焦点，且 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FB}=3$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）不过点 A 的直线 l 交椭圆 C 于 M，N 两点，记直线 l，AM，AN 的斜率分别为 k，k_1，k_2，若 $k(k_1+k_2)=1$，证明直线 l 过定点，并求出定点的坐标.

【解析】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）设直线 l 方程为 $y=kx+m$，联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，

整理得 $(4k^2+3)x^2+8mkx+4m^2-12=0$

$x_1+x_2=-\dfrac{8mk}{4k^2+3}\qquad x_1x_2=-\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$

$$k(k_1+k_2)=k\left(\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}\right)=k\frac{2kx_1x_2+(2k+m)(x_1+x_2)+4m}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$$

$$=\frac{12mk-24k^2}{4m^2-16mk+16k^2}=1$$

化简得 $(m-2k)(m-5k)=0$，所以 $m=2k$ 或 $m=5k$

对应直线方程分别为 $y=kx+2k$，$y=kx+5k$

故过定点 $(-2,0)$，$(-5,0)$，因为 l 不过 $A(-2,0)$，所以过 $(-5,0)$.

22. 设函数 $f(x)=(x^2-a)e^x$，$a\in R$，e是自然对数的底数.

（1）若 $a=3$，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $x\geq 0$ 时，$f(x)+x+a\geq 0$，求 a 的取值范围.

【解析】（1）$f(x)=(x^2-3)e^x$，$f'(x)=e^x(x^2+2x-3)=e^x(x-1)(x+3)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$，$(1,+\infty)$ 单增，$(-3,1)$ 单减，

所以极大值 $f(-3)=\dfrac{6}{e^3}$，极小值 $f(1)=-2e$，

（2）$g(x)=f(x)+x+a=(x^2-a)e^x+x+a$，$g(0)=0$，

$g'(x)=e^x(x^2+2x-a)+1$，$g'(0)=-a+1$，

$g''(x)=e^x(x^2+4x+2-a)$，$g''(0)=2-a$，

①当 $-a+1\geq 0$，即 $a\leq 1$ 时，$g''(x)>0$，所以 $g'(x)$ 单增，$g'(x)\geq g'(0)\geq 0$，

所以 $g(x)$ 单增，$g(x)\geq g(0)=0$，符合题意.

②当 $-a+1<0$，即 $a>1$ 时，$\exists x_0>0$，使得当 $x\in(0,x_0)$ 时 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单减，$g(x)<g(0)=0$，矛盾，所以舍去.

综上 $a\leq 1$.