华南师大附中 2023-2024 学年高三开学测

数学参考答案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	C	D	B	C	C	B

7：解：由二项式定理，$a_n=(2+1)^n=3^n$，$S_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}-3}{2}$，$n=6$ 时$S_n=1092$，$n=7$ 时$S_n=3279$，故选 C

8：解：令$f(x)=(x+1)lnx-x$，则$a=f'(10)=f'\left(\frac{9+1}{2}\right)$, $b=\frac{f(11)-f(9)}{11-9}$, $c=\frac{f'(9)+f'(11)}{2}$

下证对任意的$x_1,x_2>2$有$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}$；

令$g(x)=f(x)-\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}x\ (x>2)$，则只需比较$g'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, 0, $\frac{g'(x_1)+g'(x_2)}{2}$的大小

显然$g(x_1)=g(x_2)$，令$\frac{x_1+x_2}{2}=m$, $h(x)=g(x)-g(2m-x)$,

$h'(x)=g'(x)+g'(2m-x)$, $h''(x)=g''(x)-g''(2m-x)$,

$h'''(x)=g'''(x)+g'''(2m-x)$

$g'''(x)=\frac{2-x}{x^3}<0$, $h'''(x)<0$

$h''(x)$单调递减，且$h''(m)=0$

$x<m$时$h''(m)>0$，$x>m$时$h''(m)<0$

$h'(x)$在(x_1,m)单调递增，在(m,x_2)单调递减

若$h(m)\le 0$，有$h'(x)\le 0$，且至多有一个不变号零点，$h(x)$单调递减，与$h(x_1)=h(x_2)=0$矛盾

$h'(m)=2g'(m)>0$

若$h'(x_1)\ge 0$，有$h'(x)\ge 0$，且至多有一个不变号零点，$h(x)$单调递增，与$h(x_1)=h(x_2)=0$矛盾

$h'(x_1)=g'(x_1)+g'(x_2)<0$

$$g'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0>\frac{g'(x_1)+g'(x_2)}{2}$$

$$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}$$

二、多选题

题号	9	10	11	12
答案	CD	ACD	AC	BCD

三、填空题

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{2}$	$y=1$（答案不唯一）	$\frac{\sqrt{11}}{3}$	54

四、解答题

17：解：(1) $\overrightarrow{CD}=10\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{BD}=2\vec{a}+14\vec{b}=2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BD}$，$A,B,D$三点共线

(2) 设$\lambda(\vec{a}+k\vec{b})=(k+1)\vec{a}+\vec{b}$，则$\lambda a=k+1,\lambda k=1$

解得$k=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

18：解：(1) ∵四边形AA_1C_1C是正方形，

$\therefore AA_1\perp AC$.

又∵平面$ABC\perp$平面AA_1C_1C，平面$ABC\cap$平面$AA_1C_1C=AC$，

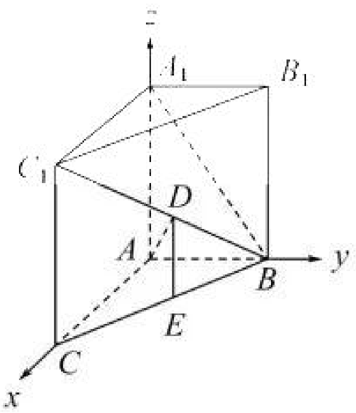
且$AA_1\subset$平面AA_1C_1C

$\therefore AA_1\perp$平面ABC .

(2) 由$AC=4,BC=5,AB=3$，得$AC^2+AB^2=BC^2$，

$\therefore AB\perp AC$.

建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A_1(0,0,4),B(0,3,0),B_1(0,3,4),C_1(4,0,4)$，

$\therefore\overrightarrow{BC_1}=(4,-3,4)$，$\overrightarrow{BA_1}=(0,-3,4)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,4)$.

设平面A_1C_1B的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，平面$B_1C_1B$的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$.

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=4x_1-3y_1+4z_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-3y_1+4z_1=0\end{cases}$，令$y_1=4$，则$x_1=0,z_1=3$，

$\therefore\overrightarrow{n_1}=(0,4,3)$. 微信搜：高三答案公众号

$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BC_1}=4x_2-3y_2+4z_2=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BB_1}=4z_2=0,\end{cases}$，令$x_2=3$，则$y_2=4$，

$\therefore\overrightarrow{n_2}=(3,4,0)$，

$\therefore |\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle| = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{16}{5\times5} = \frac{16}{25}$.

$\therefore$平面A_1C_1B与平面B_1C_1B夹角的余弦值为$\frac{16}{25}$.

19：解：（1）由正弦定理，$abcosC = c^2$

由余弦定理$a^2 + b^2 - 2abcosC = c^2$

$a^2 + b^2 = 3c^2$

（2）$a^2 + b^2 \geq 2ab$

$cosC = \frac{c^2}{ab} = \frac{2c^2}{2ab} \leq \frac{2c^2}{a^2+b^2} = \frac{2}{3}$

由$a - b < c$，$a^2 + b^2 - 2ab < c^2, 2c^2 < 2ab, cosC < 1$

$cosC \in [\frac{2}{3}, 1)$

20：解：（1）由题意知$f(x) = e^x - asinx$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上有极小值，

则$f'(x) = e^x - acosx = 0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$有解，

故$a = \frac{e^x}{cosx}$，设$g(x) = \frac{e^x}{cosx}\left(x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$，

显然$g(x) = \frac{e^x}{cosx}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，

又$g(0) = 1$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty$，所以$a > 1$，

当$a > 1$ 时，$f'(x) = e^x - acosx$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，

又$f'(0) = 1 - a < 0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$，由零点存在定理可知$\exists\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$f'(\alpha) = 0$，

此时当$x \in (0,\alpha)$时，$f'(x) < 0$，当$x \in \left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x) > 0$，

所以$f(x)$在$(0,\alpha)$上单调递减，来源：高三答案公众号

$f(x)$在$\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，故$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上有极小值点，

因此实数a的取值范围$a > 1$.

（2）由题得，$g(x) = e^x + bx$

$g'(x) = e^x + b, b < 0$，

$g'(x)$在$(-\infty, \ln(-b))$ 上小于 0，在$(\ln(-b), +\infty)$ 上大于 0

$g'(x)$最小值为$g(\ln(-b)) = -b + bln(-b)$

只需证明 $-b + bln(-b) \geq bln(-\frac{b}{2})$

即$-1 + \ln(-b) \leq ln\left(-\frac{b}{2}\right)$

即$-1 \leq ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$e>2$，该式子显然成立

21：解：（1）设$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题得$c=\sqrt{3}$，$b^2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}, b=1$

$\therefore E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）联立l_1与E，有$\left(1+4k_1^2\right)x^2+16k_1^2x+16k_1^2-4=0$

$x_1x_2=\frac{16k_1^2-4}{1+4k_1^2}, x_1=-2, x_2=\frac{-8k_1^2+2}{1+4k_1^2}$

$y_2=\frac{\left(1-4k_1^2\right)^2}{\left(1+4k_1\right)^2}$

$l_2:\frac{xx_2}{4}+yy_2=1$

$k_2=\frac{2k_1^2}{\sqrt{8k_1^2+1}}$

$k_1-k_2\in(0,+\infty)$

22：解：（1）$2S_n=n^2+a_n$

$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=2n-1+a_n-a_{n-1}\ (n>1), a_n=2n-1-a_{n-1}$

累加得$S_n=2n+2(n-1)+2(n-2)+\dots+2-n=\frac{n^2+n}{2}, a_n=n(n>1), n=1$ 时同样满足条件

$a_n=n$

（2）设$c_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)-\ln(n+1)-\frac{n}{2(n+1)}$

$c_{n+1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln(n+2)-\frac{n+1}{2(n+2)}$

$2(c_{n+1}-c_n)=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}-2\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

设$\frac{n+2}{n+1}=t$，上式$=f(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$

$f'(t)=\left(1-\frac{1}{t}\right)^2>0$

$t>1, f(t)>f(1)>0$

$c_{n+1}>c_n$，$c_n>c_1=\frac{3}{4}-\ln 2>0$

$\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}<b_1+b_2+b_3+\dots+b_n$

$-\ln n=\ln 1+\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\dots+\ln\frac{n-1}{n}=\ln 1+\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\dots+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$b_1+b_2+b_3+\dots+b_n-\ln n$

$=1+\ln 1+\frac{1}{2}+\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\dots+\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

设$f(x)=x+\ln(1-x)$，求导可知$f(x)\le f(0)=0$

$b_1+b_2+b_3+\dots+b_n-\ln n\le 1$

原不等式得证

（3）设每次乘坐到新列车的概率为p，还未乘坐过n列，则$p_n=\frac{n}{84}$，则所尝试坐上新列车的次数期望是$\frac{1}{p_n}$，累加得$E(X)=84\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{84}\right)$

$$\frac{E(X)}{84}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{84}\in\left(ln85+\frac{85}{172},ln84+1\right)$$

$$ln85+\frac{85}{172}-ln84-\frac{1}{2}=\ln\left(\frac{85}{84}\right)-\frac{1}{172}>\frac{1}{85}-\frac{1}{172}>0$$

$$\frac{E(X)}{84}\in\left(ln84+\frac{1}{2},ln84+1\right)$$

$$ln84=2ln2+ln3+ln7\approx4.43$$

$$\frac{E(X)}{84}\in(4.93,5.43)$$

$$\frac{E(X)}{84}\approx5$$