

数学试题

注意事项：1. 本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

2. 请将各题答案填在答题卡上。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{x | 2^x > 1\}$, $B = \{x | x^2 \leq 4\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ D. $\{x | x \geq -2\}$
- 已知命题 $p: \forall x \in [-4, 2], \frac{1}{2}x^2 - a \geq 0$, 则 p 为真命题的一个充分不必要条件是
A. $a \leq -2$ B. $a \leq 0$ C. $a \leq 8$ D. $a \leq 16$
- 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = 4$, $S_6 = 364$, 则 S_4 为
A. 40 或 -36 B. -36 C. 40 D. 32
- 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 已知 $PA \perp$ 底面 ABC , $CA = CB = PA = 2$, $AC \perp BC$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为
A. 16π B. $4\sqrt{3}\pi$ C. 48π D. $12\sqrt{3}\pi$
- $\tan 67.5^\circ - 1 =$
A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y = kx$ 与 C 交于 P, Q 两点, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{QF_1} = 0$, 且 $\triangle PF_2Q$ 的面积为 $4a^2$, 则 C 的离心率是
A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. 3
- 已知 x_1, x_2 分别是方程 $e^x + x - 4 = 0$, $\ln(x-1) + x - 5 = 0$ 的根, 则 $e^{x_1} + 1 + \ln(x_2 - 1)$ 的值为
A. $e + \ln 5$ B. $e^2 + \ln 5$ C. 10 D. 5
- 已知 $a = e^{0.8} + 1$, $b = \frac{14}{5}$, $c = \ln(0.8e^3)$, 则 a, b, c 的大小关系为
A. $a > c > b$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

- 已知 i 为虚数单位，下列关于复数的命题正确的有
A. $1 + i + i^2 + i^3 = 0$
B. 复数 $1 + i$ 的虚部为 i
C. 若 z_1, z_2 互为共轭复数，则 $|z_1| = |z_2|$
D. 若复数 $z = m^2 - 1 + (m - 1)i$ 为纯虚数，则 $m = -1$

10. 若函数 $f(x) = 2\sin\omega x(\cos\omega x - \sin\omega x) - 1 (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π , 则
- A. $f(-\frac{\pi}{8}) = 0$
- B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减
- C. $f(x) = -2$ 在 $[0, \frac{5\pi}{2}]$ 内有 5 个零点
- D. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域为 $[-1, \sqrt{2}]$
11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, E 为 AA_1 上靠近 A 的四等分点, F 为 CC_1 上靠近 C_1 的四等分点, M 为四边形 ABB_1A_1 内一点 (包含边界), 若 $MA_1 \parallel$ 平面 BEF , 则下列结论正确的是
- A. 线段 MC_1 长度的最小值为 $\sqrt{17}$
- B. 三棱锥 $C_1 - MDD_1$ 的体积为定值
- C. $DE \parallel$ 平面 B_1D_1F
- D. 直线 EF 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$
12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$, F_1, F_2 分别为其左、右焦点, 椭圆 C 的离心率为 e , 点 M 在椭圆上, 点 $N(2, \sqrt{2})$ 在椭圆内部, 则以下说法正确的是
- A. 离心率 e 的取值范围为 $(0, \frac{\sqrt{15}}{5})$
- B. 不存在点 M , 使得 $\overrightarrow{MF_1} + \overrightarrow{MF_2} = \vec{0}$
- C. 当 $e = \frac{1}{2}$ 时, $|MF_1| + |MN|$ 的最大值为 $\frac{15}{2}$
- D. $\frac{1}{|MF_1|} + \frac{1}{|MF_2|}$ 的最小值为 1

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.
14. 某种红糖的袋装质量 X 服从正态分布 $N(400, 25)$, 随机抽取 5000 袋, 则袋装质量在区间 $(390, 405)$ 的约有 _____ 袋. (质量单位: g)
- 附: 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$,
 $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$.
15. 现有小赵、小钱、小孙、小李、小刘 5 人去北京、上海、广州三地参加研讨会, 每人只能去一个城市, 每个城市至少去一人, 则小赵不去北京的概率为 _____.
16. 若过点 $P(4, m) (m \in R)$ 有 3 条直线与函数 $f(x) = xe^x$ 的图象相切, 则 m 的取值范围是 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $6S_n = (a_n + 2)(a_n + 1)$ ，首项 $a_1 \neq 1$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

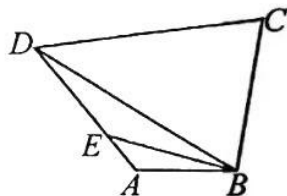
(2) 证明： $\frac{1}{S_1+1} + \frac{1}{S_2+2} + \dots + \frac{1}{S_n+n} < \frac{2}{3}$ 。

18. (本题满分 12 分)

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 135^\circ$ ， $AB = 2$ ， $\angle ABD$ 的平分线交 AD 于点 E ，且 $BE = 2\sqrt{2}$ 。

(1) 求 $\angle ABE$ 及 BD ；

(2) 若 $\angle BCD = 60^\circ$ ，求 $\triangle BCD$ 周长的最大值。



19. (本题满分 12 分)

食品安全问题越来越受到人们的重视。某超市在购进某种水果之前，要求食品安全部门对每箱水果进行三轮各项指标的综合检测，只有三轮检测都合格，这种水果才能在该超市销售。已知每箱这种水果第一轮检测不合格的概率为 $\frac{1}{4}$ ，第二轮检测不合格的概率为 $\frac{1}{5}$ ，第三轮检测不合格的概率为 $\frac{1}{6}$ ，每轮检测只有合格与不合格两种情况，且各轮检测互不影响。

(1) 求每箱这种水果能在该超市销售的概率；

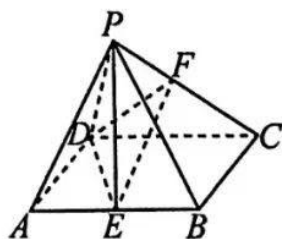
(2) 若这种水果能在该超市销售，则每箱可获利 300 元，若不能在该超市销售，则每箱亏损 100 元，现有 4 箱这种水果，求这 4 箱水果总收益 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ 。

20. (本题满分 12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $AB=2AD=2$, E 为 AB 的中点, $PE \perp$ 底面 $ABCD$, F 是 PC 上的点.

(1) 若 $PA \parallel$ 平面 DEF , 求 $\frac{PF}{PC}$ 的值;

(2) 若 F 是 PC 的中点, 且二面角 $P-DE-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$, 求直线 PD 与平面 DEF 所成角的正弦值.



21. (本题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2=2px$ 过点 $A(2, 4)$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) P, Q 是抛物线 C 上的两个动点, 直线 AP 的斜率与直线 AQ 的斜率之和为 4, 证明: 直线 PQ 恒过定点.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=xe^{2x}-ax^3$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线在 x 轴上的截距;

(2) 当 $16 \leq a < 25$ 时, 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的零点 x_1, x_2 , 且

当 $x_1 < x_2$ 时, $nx_1 - x_2 < \frac{n-e}{e-1}$, ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$).

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw