成都七中高 2023 届三诊模拟考试数学（文科参考答案）

一．选择题

1—5：DABDA　6—10：CDCBD　11—12：CB

12.解: 因为 $f(b)=0$， $x=b$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，结合三次函数的图象可设

$f(x)=(x-b)^2(x+m)$，又 $f(x)=(x-b)(x^2+ax+b)$，

令 $x=0$ 得 $b^2m=-b^2$， $m=-1$，即 $f(x)=(x-1)(x-b)^2$，

$f'(x)=3x^2-(4b+2)x+b^2+2b=(x-b)(3x-b-2)$，由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=b$， $x_2=\dfrac{b+2}{3}$，

$x=b$ 是极小值点，则 $x=\dfrac{b+2}{3}$ 是极大值点，$b>\dfrac{b+2}{3}$，所以 $b>1$.

二．填空题

13. $-\sqrt{2}$　　14. 10　　15.20　　16.108

三．解答题

17 .解：（1）$\because \theta=\dfrac{\pi}{3}$，此时 $\angle PAB=\dfrac{2\pi}{3}$ ，由余弦定理可知

$PB^2=8-8\cos\dfrac{2\pi}{3}=12$.$\therefore PB=2\sqrt{3}$ ……………………………….5 分

（2）ΔPAC 中，$\angle PCA=\pi-2\theta$，由正弦定理可知，$\dfrac{PA}{\sin(\pi-2\theta)}=\dfrac{PC}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

$\therefore PA=\dfrac{2\sin(\pi-2\theta)}{\sin\theta}=4\cos\theta$. $S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}PA\cdot AB\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$. …………….8 分

$\therefore S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}4\cos\theta\cdot2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)=4\cos\theta\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)=\sin2\theta+\sqrt{3}\cos2\theta+\sqrt{3}$

即 $S_{\Delta PAB}=2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$ ，当且仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ 时面积取得最大值.

$\therefore \Delta PAB$ 面积的取值范围为 $\left(0,2+\sqrt{3}\right]$. ………………………..12 分

18．解：（1）因为前两个矩形的面积之和为 $(0.01+0.03)\times10=0.4<0.5$，前三个矩形面积为 $(0.01+0.03+0.04)\times10=0.8>0.5$，

所以中位数在 $(80,90)$ 之间，设中位数为 x，

则 $10\times(0.01+0.03)+(x-80)\times0.04=0.5$，解得 $x=82.5$，故中位数为 82.5. ………….6 分

（2）由题意可得，成绩在 $[80,90]$ 上的概率为 0.4，即有 4 名同学，其中 2 男 2 女.

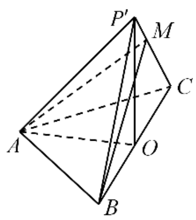
其中至少有一个女生的概率为 $1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$. ………………………..12 分

19． 解：（1）取 BC 中点 O，连接 AO， $P'O$，因为 ΔABC 为等边三角形，

O 为 BC 的中点，则 $AO\perp BC$，

又 $BC\perp P'A$， $AO\cap AP'=A$， AO, $AP'\subset$ 平面 $AP'O$，

$\therefore BC\perp$ 平面 $AP'O$，所以平面 $AP'O$ 即为平面 α . ………………6 分



（2）由（1）可知， 因为$P'O\perp$平面ABC，$AO\perp BC$，$V_{C-AMB}=V_{M-ABC}=\dfrac{2}{3}V_{P'-ABC}$.

又$V_{P'-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot P'O\cdot S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=1$，$\therefore V_{C-AMB}=\dfrac{2}{3}$.　　　…………………12 分

20．解：（1）由题椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$|PF_1|+|PF_2|=4$，可得$a=2$，又因为点$P(1,-\dfrac{3}{2})$在椭圆$C_1$上，

即$\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4b^2}=1$，得$b^2=3$，所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.　　………………………4 分

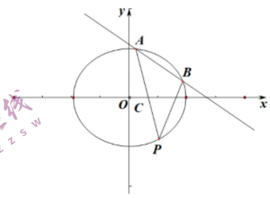
(2)设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_p,y_p)$.

因为直线PA、PB的倾斜角互补，且A，B是不同的点，所以直线PA、PB都必须有斜率，

设直线PA方程为$y=k(x-1)-\dfrac{3}{2}$，

联立$\begin{cases} y=k(x-1)-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，整理得$(3+4k^2)x^2-(8k^2+12k)x+4k^2+12k-3=0$，…….7 分

A 和P点横坐标即为方程两个根，当$\Delta>0$时，可得



$x_A+x_P=\dfrac{8k^2+12k}{3+4k^2}$，因为$x_P=1$，所以$x_A=\dfrac{4k^2+12k-3}{3+4k^2}$，

代入直线PA可得$y_A=\dfrac{12k^2-12k-9}{6+8k^2}$，

即$A(\dfrac{4k^2+12k-3}{3+4k^2},\dfrac{12k^2-12k-9}{6+8k^2})$，又因为直线$PA$、$PB$的倾斜角互补，将$k$换成$-k$，

可得$B(\dfrac{4k^2-12k-3}{3+4k^2},\dfrac{12k^2+12k-9}{6+8k^2})$，

两点求斜率可得出$k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{1}{2}$,所以直线$AB$的斜率为$-\dfrac{1}{2}$.　　……………………12 分

21.解：（1）$f'(x)=-\sin x+x$，且$f'(0)=0$.令$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=-\cos x+1$.

易知$g'(x)\geq 0$,则$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

当$x>0$时，$g(x)=f'(x)>g(0)=0$；当$x<0$时，$g(x)=f'(x)<g(0)=0$.

$\therefore$ $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

$\therefore x=0$是函数$f(x)$的极小值点.

$\therefore f(x)_{极小值}=f(0)=0$，无极大值.　　………………………5 分

(2)由（1）的证明可知，当$a=1$且$x>0$时，$-\sin x+x>0$即$x>0,x>\sin x$.

$\sin\dfrac{1}{2}+\sin\dfrac{2}{4}+\sin\dfrac{3}{8}+\cdots+\sin\dfrac{2023}{2^{2023}}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{2023}{2^{2023}}$.

令 $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{2023}{2^{2023}}$，

则 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots+\frac{2023}{2^{2024}}$，

两式相减得 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{2023}}-\frac{2023}{2^{2024}}$，

化简可得 $S=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}-\frac{2023}{2^{2024}}\right)<2$，

故 $\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{2}{4}+\sin\frac{3}{8}+\ldots+\sin\frac{2023}{2^{2023}}<2$. ……………………….12 分

22 解：（1）因为 $\begin{cases}x=1+\dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\cos2\alpha}①,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan2\alpha②,\end{cases}$

$①^2-2\times②^2$ 得 $x^2-2y^2=\frac{1}{\cos^2 2\alpha}-\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=1$,..

由 $\theta=\frac{\pi}{6}$，得 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3},\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta$，

所以 $\rho\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\rho\cos\theta$，所以 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,

所以 C 的普通方程为 $x^2-2y^2=1$，l 的直角坐标方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. ……………………….5 分

（2）联立 $\begin{cases}x^2-2y^2=1\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ y=-1\end{cases}$，

所以 l 与 C 交点的直角坐标分别为 $(\sqrt{3},1)$，$(-\sqrt{3},-1)$，

设点 $(\sqrt{3},1)$ 的极坐标为 (ρ_1,θ_1)，$\rho_1\geq0$，$\theta_1\in[0,2\pi)$，

则 $\rho_1=\sqrt{3+1}=2$，$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\theta_1=\frac{1}{2}$，

所以 $\rho_1=2$，$\theta_1=\frac{\pi}{6}$，

所以点 $(\sqrt{3},1)$ 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$，

同理可得点 $(-\sqrt{3},-1)$ 的极坐标为 $\left(2,\frac{7\pi}{6}\right)$，

故 l 与 C 交点的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(2,\frac{7\pi}{6}\right)$. ……………………….10 分

（注：由教材选修 4-4 的 P11 旁侧备注可知，一般情况只要取 $\rho>0,\theta\in[0,2\pi)$.）

23．解：（1）当 $a=2$ 时，原不等式可化为 $|3x-1|+|x-2|\geq3$.

①当 $x\leq\frac{1}{3}$ 时，$1-3x+2-x=3-4x\geq3$，解得：$x\leq0$，$\therefore x\leq0$；

②当$\frac{1}{3}<x<2$时，$3x-1+2-x=2x+1\geq 3$，解得：$x\geq 1$，$\therefore 1\leq x<2$；

③当$x\geq 2$时，$3x-1+x-2=4x-3\geq 3$，解得：$x\geq \frac{3}{2}$，$\therefore x\geq 2$；

综上所述：不等式$\left|x-\frac{1}{3}\right|+f(x)\geq 1$的解集为$\{x|x\leq 0$或$x\geq 1\}$. ………………………5 分

（2）由$\left|x-\frac{1}{3}\right|+f(x)\leq x$知：$|3x-1|+|x-a|\leq 3x$，

$\because \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\subseteq M$，$\therefore |3x-1|+|x-a|\leq 3x$在$\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$上恒成立，

$\therefore 3x-1+|x-a|\leq 3x$，即$|x-a|\leq 1$，$\therefore -1\leq x-a\leq 1$，解得：$a-1\leq x\leq a+1$，

$\therefore \begin{cases} a-1\leq \frac{1}{3} \\ a+1\geq \frac{1}{2} \end{cases}$，解得：$-\frac{1}{2}\leq a\leq \frac{4}{3}$，即实数$a$的取值范围为$\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$. …………………10 分