第十三次适应性训练

理科数学参考答案

一．选择题：本题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	D	D	B	C	A	C	C	C	D

二．填空题：本题共 4 小题，每题 5 分共 20 分.

13. -8　　　14. $-\dfrac{31}{2}$　　　15. $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　　16. $-2e$

三．解答题：共 70 分，其中 17—21 题每题 12 分，第 22、23 题，每题 10 分.

17.解（1）在 ΔABC 中，由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$.又 $\dfrac{\sqrt{3}a}{1+\cos A}=\dfrac{c}{\sin C}$

所以，$\dfrac{\sqrt{3}a}{1+\cos A}=\dfrac{a}{\sin A}$.所以，$\sqrt{3}\sin A=1+\cos A$，即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

即 $\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由（1）及题意知 ΔABC 中，$a=\sqrt{3},c-b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},A=\dfrac{\pi}{3}$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $3=(c-b)^2+bc$.所以 $bc=1+\sqrt{3}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.

18.（1）证明：因为 $AC_1\perp A_1C$，$AC_1\perp BD$，$A_1C\cap BD=D$，$A_1C,BD\subset$ 面 A_1BC.

所以，$AC_1\perp$ 面 A_1BC.又 $BC\subset$ 面 A_1BC，所以 $AC_1\perp BC$，又 $\angle ACB=90^\circ$ 即 $BC\perp AC$

而 $AC\cap A_1C=A$，$AC,A_1C\subset$ 面 ACC_1A_1，所以 $BC\perp$ 面 ACC_1A_1.又因为 $BC\subset$ 面 ABC

所以，面 $ACC_1A_1\perp$ 面 ABC.

（2）由（1）知面 $ACC_1A_1\perp$ 面 ABC，又面 $ACC_1A_1\cap$ 面 $ABC=AC$，因为 $AA_1\perp AC$，

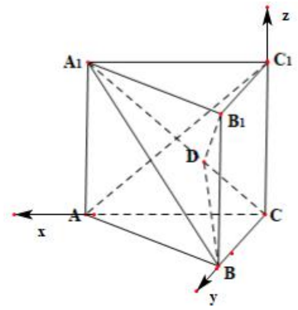
所以 $AA_1\perp$ 面 ABC，又 $AA_1/\!/CC_1$.所以 $CC_1\perp$ 面 ABC，所以 CA,CB,CC_1 两两垂直.

以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系如图所以：

因为四边形 ACC_1A_1 为正方形，所以 $AC=2,BC=1,CC_1=2$.

$C(0,0,0), B(0,1,0), A_1(2,0,2), B_1(0,1,2), D(1,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{CB}=(0,1,0), \overrightarrow{CA_1}=(2,0,2), \overrightarrow{B_1D}=(1,-1,-1)$，设面 A_1BC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$，可得 $\vec{n}=(1,0,-1)$.设 B_1D 与面 A_1BC 所成的角为 θ，



所以 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{B_1D}>|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 B_1D 与面 A_1BC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

19. 解解：（1）由已知任取一个甲生产线零件为一等品的概率为 $\dfrac{23+28+24}{100}=\dfrac{3}{4}$，

任取一个乙生产线零件为一等品的概率为 $\dfrac{15+17+16}{80}=\dfrac{3}{5}$.

ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，4.

$P(\xi=0)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{400}$，$P(\xi=1)=C_2^1\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+C_2^1\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{36}{400}$，

$P(\xi=2)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+C_2^1\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\left(C_2^1\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{117}{400}$，

$P(\xi=3)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times C_2^1\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}+C_2^1\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{162}{400}$，$P(\xi=4)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{81}{400}$

所以 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{4}{400}$	$\dfrac{36}{400}$	$\dfrac{117}{400}$	$\dfrac{162}{400}$	$\dfrac{81}{400}$

$E(\xi)=0\times\dfrac{4}{400}+1\times\dfrac{36}{400}+2\times\dfrac{117}{400}+3\times\dfrac{162}{400}+4\times\dfrac{81}{400}=\dfrac{27}{10}$.

（2）由已知，每个零件为三等品的频率为 $\dfrac{4+2+2+1}{180}=\dfrac{1}{20}$，

设余下的 50 个零件中的三等品个数为 X，则 $X\sim B\left(50,\dfrac{1}{20}\right)$，

所以 $E(X)=50\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{5}{2}$.

设检验费用与赔偿费用之和为 Y，

若不对余下的所有零件进行检验，则 $Y=10\times5+120X$，

$E(Y)=50+120\times E(X)=50+120\times\dfrac{5}{2}=350$.

若对余下的所有零件进行检验，则检验费用 $60\times5=300$ 元.

因为 $350>300$，所以应对剩下零件进行检验.

20. 解（1）因为 $P(1,1)$ 在 C 的渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上，所以 $a=b$，

因为 $A(a,0)$，所以 ΔPAO 的面积为 $\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{2}$，解得 $a=1$，所以 $b=1$，

所以 C 的方程为 $x^2-y^2=1$.

（2）当直线 l 的斜率不存在时，不符合题意，舍去.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-1),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y-1=k(x-1)\\x^2-y^2=1\end{cases}$，得 $(1-k^2)x^2-2k(1-k)x-k^2+2k-2=0$.

由 $\begin{cases}1-k^2\neq0\\\Delta>0\end{cases}$，得 $k<1$ 且 $k\neq-1$. 则 $x_1+x_2=\dfrac{2k}{1+k}$，　$x_1x_2=\dfrac{k^2-2k+2}{k^2-1}$.

直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，令 $x=x_2$，得 $G(x_2,\dfrac{y_1(x_2-1)}{x_1-1})$.

因为 H 为 NG 的中点，所以 $H(x_2,\dfrac{\dfrac{y_1(x_2-1)}{x_1-1}+y_2}{2})$.

所以 $k_{AH}=\dfrac{\dfrac{\dfrac{y_1(x_2-1)}{x_1-1}+y_2}{2}}{x_2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1})$

因为 $\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{k(x_1-1)+1}{x_1-1}+\dfrac{k(x_2-1)+1}{x_2-1}=2k+\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}$.

又 $\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}=\dfrac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=\dfrac{\dfrac{2k}{1+k}-2}{\dfrac{k^2-2k+2}{k^2-1}-\dfrac{2k}{k+1}+1}=2-2k$

所以 $k_{AH}=1$, 即直线 AH 的斜率为定值.

21. （1）由题设知 $f'(x)=e^x(1+\dfrac{a}{x}+a\ln x),\ (x>0)$

$g(x)=e^{-x}f^{'}(x)=1+\frac{a}{x}+a\ln x$，$g^{'}(x)=\frac{a(x-1)}{x^2}\,(x>0)$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g^{'}(x)<0,\ g(x)$ 为减函数；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g^{'}(x)>0,\ g(x)$ 为增函数.

故 $g(x)_{\min}=g(1)=1+a$，由于 $g(x)\geq 2$ 恒成立，故 $1+a\geq 2$，故 $a\geq 1$.

（注：也可分离参数）

（2）设 $h(x)=f^{'}(x)=e^x(1+\frac{a}{x}+a\ln x)$ ，则 $h^{'}(x)=e^x(1+\frac{2a}{x}-\frac{a}{x^2}+a\ln x)$

设 $H(x)=1+\frac{2a}{x}-\frac{a}{x^2}+a\ln x$，$H^{'}(x)=\frac{a(x^2-2x+2)}{x^3}>0$，故 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\because a>2,\ \therefore H(1)=a+1>0,\ H(\frac{1}{2})=1-a\ln 2<0$，故存在 $x_2\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $H(x_2)=0$

则 $h(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增.

故 x_2 是 $h(x)$ 的极小值点，所以 $x_2=x_1$.

由（1）知，当 $a=1$ 时，$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$（当 $x=1$ 时取等），故 $h(x)\geq h(x_1)=e^{x_1}(1+\frac{a}{x_1}+a\ln x_1)>e^{x_1}(1+a)>0$，

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

由 $H(x_1)=0$，即 $1+\frac{2a}{x_1}-\frac{a}{x_1^2}+a\ln x_1=0$，即 $1+a\ln x_1=\frac{a}{x_1^2}-\frac{2a}{x_1}$.

故 $f(x_1)=e^{x_1}(1+a\ln x_1)=ae^{x_1}\frac{1-2x_1}{x_1^2}<0=f(x_0)$. 又由（1）可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $x_0>x_1$

方法二：因为 $f(x_0)=0$，所以 $1+a\ln x_0=0$，即 $a=-\frac{1}{\ln x_0}$，由 $a>2$ 得 $-\frac{1}{\ln x_0}>2\Rightarrow x_0>e^{-\frac{1}{2}}$

所以 $H(x_0)=1+\frac{2a}{x_0}-\frac{a}{x_0^2}+a\ln x_0=1+a\ln x_0+\frac{a(2x_0-1)}{x_0^2}=\frac{a(2x_0-1)}{x_0^2}$，

因为 $x_0>e^{-\frac{1}{2}}$，所以 $2x_0>2e^{-\frac{1}{2}}>1$，即 $2x_0-1>0$.

因此，$H(x_0)>0=H(x_1)$，又 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x_0>x_1$.

22. 解（1）$\because C:\rho=4a\cos\theta\,(a>0),\quad \therefore \rho^2=4\rho a\cos\theta$. 由 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ 得：

$(x-2a)^2+y^2=4a^2$，所以，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2a+2a\cos\alpha\\ y=2a\sin\alpha\end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）.

消参得直线l的普通方程为：$x+y-2=0$.

（2）由（1）知曲线C的直角坐标方程为：$(x-2a)^2+y^2=4a^2$，其轨迹为圆，易知圆心到直线l的距离小于半径$2a$，即$\dfrac{|2a-2|}{\sqrt{2}}<2a$，得$a>\sqrt{2}-1$.

因为弦MN的长为$2\sqrt{4a^2-(\dfrac{2a-2}{\sqrt{2}})^2}=2\sqrt{2}\sqrt{a^2+2a-1}$，原点$O$在直线$MN$的距离$d=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

所以$S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}|MN|d=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\sqrt{a^2+2a-1}\times\sqrt{2}=2\sqrt{a^2+2a-1}$

又$S_{\Delta OMN}=2\sqrt{7}$，所以$2\sqrt{a^2+2a-1}=2\sqrt{7}$，得$a=2$或$a=-4$（舍去）. 所以实数$a$的值为$2$.

23. 解（1）由题意得

$$f(x)=\begin{cases}3x, & x\geq 2\\ -x+8, & -4<x<2\\ -3x, & x\leq -4\end{cases},$$

所以$f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增.

因此$f(x)$的最小值$m=f(2)=6$

（2）由（1）知$a+b+c=6$

所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+a\sqrt{ac}$

由基本不等式$2\sqrt{ab}\leq a+b,\quad 2\sqrt{bc}\leq b+c,\quad 2\sqrt{ac}\leq a+c$

所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\leq 3(a+b+c)=18$，当且仅当$a=b=c$时等号成立，即$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq 3\sqrt{2}$.