# 黑卷 · 数学

## 参考答案及评分标准

评分标准

### 一、选择题(共40分)

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | A | B | C | D | B | A | D |

每小题5分,与答案不符的均不给分。

### 二、选择题(共20分)

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | CD | AC | ABD | ABC |

每小题5分,有多项符合要求,全部选对得5分,部分选对得2分,有选错得0分。

### 三、填空题(共20分)

每小题5分,与答案不符的均不给分。

**13.** $12x+y-26=0$　**14.** 18　**15.** $\frac{17\pi}{6}$　**16.** $\left[\frac{1}{4},\frac{\sqrt{13}}{13}\right]$



### 四、解答题(共70分)

**17.** 解:(1)选择条件①:因为 $S_n=\frac{n(a_n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$,

结构不良题需标明所选的条件

所以 $2S_n=na_n+n(n\in\mathbf{N}^*)$,$2S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}+n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,

两式相减可得 $2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,

即 $na_n-1=(n-1)a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,(2分)

正确得到 $a_n$ 与 $a_{n+1}$ 的关系式得2分

所以 $(n+1)a_{n+1}-1=na_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$,

两式相减可得 $(n+1)a_{n+1}-na_n=na_{n+2}-(n-1)a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,

化简可得 $2na_{n+1}=n(a_{n+2}+a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,(4分)

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.(5分)

正确得到结论得1分

选择条件②:设数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的首项为 $b_1$,公差为 $p$,

则 $\frac{S_n}{n}=\frac{S_1}{1}+(n-1)p=np+b_1-p$,故 $S_n=pn^2+(b_1-p)n$.(2分)

正确得到 $S_n$ 的表达式得2分

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=pn^2+(b_1-p)n-p(n-1)^2-(b_1-p)(n-1)$

$=b_1+2(n-1)p$,

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1$,所以 $a_n=b_1+2(n-1)p$,(4分)

正确得到 $a_n$ 的表达式得2分

又当 $n\geqslant2$ 时,$a_n-a_{n-1}=b_1+2(n-1)p-b_1-2[(n-1)-1]p=2p$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.(5分)

选择条件③:因为数列 $\{2^{a_n}\}$ 是等比数列,

所以 $2^{a_n}\cdot2^{a_{n+2}}=(2^{a_{n+1}})^2$,(2分)

即 $2^{a_n+a_{n+2}}=2^{2a_{n+1}}$,所以 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$.(4分)

正确化简 $a_n,a_{n+1},a_{n+2}$ 的关系式得2分

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.(5分)

(2)因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,且公差 $d=\frac{a_3-a_1}{2}=2$,

所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2$.

所以$\frac{n}{(n+2)S_n}=\frac{1}{(n+2)n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.(7分)

→ 正确得到$\frac{n}{(n+2)S_n}$的表达式得2分

故 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$(9分)

→ 正确得到 $T_n$ 的表达式得2分

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.(10分)

→ 正确化简 $T_n$ 的表达式得1分

**18.** 解:(1)由已知可得 $\cos B=\frac{2c-b}{2a}$,

由余弦定理可得$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2c-b}{2a}$,(2分)

→ 正确利用余弦定理化简题设等式得2分

整理得 $b^2+c^2-a^2=bc$,

由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,(4分)

→ 正确利用余弦定理求得 $\cos A$ 得2分

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.(6分)

→ 正确得到 $A$ 得2分

(2)因为 $M$ 为 $BC$ 的中点,所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

则 $\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$,

即 $AM^2=\frac{1}{4}\left(c^2+b^2+2bc\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}[(b+c)^2-bc]$.(8分)

→ 正确表示 $AM^2$ 得2分

因为 $b+c=3$,所以 $AM^2=\frac{1}{4}[9-b(3-b)]=\frac{1}{4}(b^2-3b+9)$

$=\frac{1}{4}\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{16}$.(10分)

→ 正确化简 $AM^2$ 的表达式得2分

所以 $AM^2\in\left[\frac{27}{16},\frac{9}{4}\right)$,所以 $AM\in\left[\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{2}\right)$.(12分)

→ 正确求得 $AM$ 的取值范围得2分

**19.** 解:(1)由题意可得 $5m+5=30$,解得 $m=5$.(2分)

→ 正确求得 $m$ 值得2分

(2)由(1)可得,$K^2=\frac{80(25\times10-5\times40)^2}{30\times50\times65\times15}\approx0.137<6.635$.(4分)

→ 正确求得 $K^2$ 得2分

所以没有99%的把握认为发射状态与测试方式有关.(5分)

→ 正确得出结论得1分

(3)用分层抽样方法抽取10次模拟实验,则符合发射状态的有8次,不符合发射状态的有2次,

故 $X$ 的可能取值为0,1,2.(7分)

→ 正确得出 $X$ 的值得2分

则 $P(X=0)=\frac{C_2^0C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$,$P(X=1)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$,

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$.(10分)

→ 正确求得 $X$ 对应取值的概率得3分

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

故 $E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$.（12 分）

正确求得分布列及期望得 2 分

**20.** 解：(1) 连接 $AE$，$PF$，$BD$，如图①所示.

因为三棱锥 $P\text{-}CDE$ 与四棱锥 $P\text{-}ABED$ 的体积比为 $1:3$，

所以 $S_{\triangle CDE}:S_{四边形ABED}=1:3$，即 $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}$.

所以 $E$ 为 $BC$ 的中点.（2 分）

正确判断点 $E$ 的位置得 2 分

所以 $BE=\frac{1}{2}AD=\sqrt{3}$，$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=2\sqrt{3}$，$AE=AD$，（4 分）

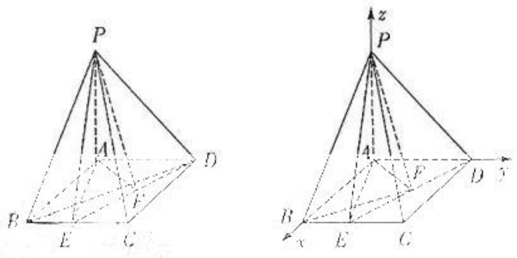
正确证明 $AE=AD$ 得 2 分

又 $F$ 为 $DE$ 的中点，所以 $AF\perp DE$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$DE\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp DE$，

又 $PA\cap AF=A$，$PA$，$AF\subset$ 平面 $PAF$，所以 $DE\perp$ 平面 $PAF$.（6 分）

正确证明 $DE\perp$ 平面 $PAF$ 得 2 分




第 20 题解图

(2) 因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，

所以 $PA$，$AB$，$AD$ 两两垂直，

故以 $A$ 为坐标原点，$AB$、$AD$、$AP$ 所在直线分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴，建立如图②所示的空间直角坐标系 $Axyz$.

建立空间直角坐标系前应先说明建系依据，未说明扣 1 分

易知 $\angle PEA$ 为 $PE$ 与平面 $ABCD$ 所成角，

即 $\angle PEA=\frac{\pi}{6}$，所以 $PA=AE\cdot\tan\angle PEA=2$.

则 $A(0,0,0)$，$B(3,0,0)$，$D(0,2\sqrt{3},0)$，

$P(0,0,2)$，$E(3,\sqrt{3},0)$，$F\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{BP}=(-3,0,2)$，$\overrightarrow{PF}=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},-2\right)$，（8 分）

正确计算 $PA=2$ 及所需向量得 2 分

设平面 $PBF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3x+2z=0,\\ \frac{3}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}y-2z=0,\end{cases}$

令 $x=2$，则 $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$z=3$，故 $\boldsymbol{n}=\left(2,\frac{2}{\sqrt{3}},3\right)$.

易得平面 $PAB$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，（10 分）

正确计算平面 $PBF$ 与平面 $PAB$ 的法向量得 2 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{43}}{43}$.

设二面角 $A\text{-}PB\text{-}F$ 为 $\theta$，由图可知 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

故 $\cos\theta=\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{2\sqrt{43}}{43}$.

所以二面角 $A$-$PB$-$F$ 的余弦值为$\frac{2\sqrt{43}}{43}$. (12 分)

正确计算二面角 $A$-$PB$-$F$ 的余弦值得 2 分；没有回归设问扣 1 分

**21.** **解**：(1) 由椭圆方程知其左、右焦点分别为 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，

设双曲线 $T$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则 $c^2=a^2+b^2=4$. (1 分)

正确利用焦点坐标求 $c^2$ 得 1 分

又焦点到其渐近线的距离为$\sqrt{3}$，所以 $b=\sqrt{3}$，$a=1$. (3 分)

正确利用渐近线性质求 $b$，进而得 $a$ 得 2 分

所以双曲线 $T$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$. (4 分)

正确求得渐近线方程得 1 分

(2) 由(1)可知双曲线 $T$：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，$F(2,0)$ 为双曲线的右焦点，

易知直线 $l$ 的斜率存在.

①当直线 $l$ 斜率为 0 时，则直线 $l$：$y=0$，

没有讨论直线 $l$ 斜率为 0 的情况扣 1 分

点 $P(-1,0)$，$Q(1,0)$，故圆心为$(1,0)$，$r=1$. 所以$\frac{|PQ|}{r}=2$. (5 分)

正确求得直线 $l$ 斜率为 0 时的比值得 1 分

②当直线 $l$ 斜率存在且不为 0 时，设直线 $l$：$y=k(x-2)$，

联立$\begin{cases} y=k(x-2), \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$消去 $y$ 得 $(3-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+3)=0$，

由直线 $l$ 与双曲线 $T$ 交于 $P$，$Q$ 两点，可得 $3-k^2\neq 0$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2+3}{k^2-3}$.

设过 $E$，$F$ 的圆的圆心为 $C$，线段 $EF$ 的中点为 $N$，

则 $CN\perp EF$，即 $CN\perp PQ$. 故直线 $CN$ 的斜率为$-\frac{1}{k}$. (7 分)

正确求得直线 $CN$ 斜率得 2 分

设线段 $PQ$ 的中点 $E(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k^2}{k^2-3}$，

故 $x_N=\frac{x_0+2}{2}=\frac{\frac{2k^2}{k^2-3}+2}{2}=\frac{2k^2-3}{k^2-3}$，$y_N=k(x_N-2)=\frac{3k}{k^2-3}$.

故直线 $CN$：$y-\frac{3k}{k^2-3}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{2k^2-3}{k^2-3}\right)$，则 $C\left(\frac{5k^2-3}{k^2-3},0\right)$. (9 分)

正确求得点 $C$ 坐标得 2 分

所以 $r=|FC|=\left|\frac{5k^2-3}{k^2-3}-2\right|=\frac{3(k^2+1)}{|k^2-3|}$，

$$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{4k^2}{k^2-3}\right)^2-4\cdot\frac{4k^2+3}{k^2-3}}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{36k^2+36}{(k^2-3)^2}}=\frac{6(k^2+1)}{|k^2-3|}.$$

所以$\frac{|PQ|}{r}=2$. (11 分)

正确求得直线 $l$ 斜率不为 0 时的比值得 2 分

综上，当圆心在 $x$ 轴上时，$\frac{|PQ|}{r}$为定值 2. (12 分)

正确得到结论得 1 分

黑卷·数学

13

**22. 解：**(1)$f'(x)=\frac{(ax+1)'e^x-(ax+1)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{a-ax-1}{e^x}$.

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1-\frac{1}{a}$，(因为 $a$ 正负影响 $f'(x)$ 正负，故将 $a$ 分为 $a<0,a=0,a>0$ 讨论)

所以当 $x\in\left(-\infty,1-\frac{1}{a}\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(1-\frac{1}{a},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；(2 分)

正确求得函数 $f(x)$ 的导函数及 $a<0$ 时的单调区间得 2 分

当 $a=0$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{e^x}<0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1-\frac{1}{a}$，

所以当 $x\in\left(1-\frac{1}{a},+\infty\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(-\infty,1-\frac{1}{a}\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；(4 分)

正确求得 $a=0$ 及 $a>0$ 时的单调区间得 2 分

综上，当 $a<0$ 时，单调递减区间为 $\left(-\infty,1-\frac{1}{a}\right)$，

单调递增区间为 $\left(1-\frac{1}{a},+\infty\right)$；

当 $a=0$ 时，单调递减区间为 $\mathbf{R}$，无单调递增区间；

当 $a>0$ 时，单调递减区间为 $\left(1-\frac{1}{a},+\infty\right)$，

单调递增区间为 $\left(-\infty,1-\frac{1}{a}\right)$. (5 分)

正确总结 $a$ 取值不同时对应的单调区间得 1 分

(2)原不等式为 $\frac{3+2\ln x}{e^x}\leqslant\frac{ax+1}{e^x}+2x$，即 $ax\geqslant 2+2\ln x-2xe^x$.

因为 $x>0$，所以 $a\geqslant\frac{2+2\ln x-2xe^x}{x}=\frac{2+2\ln x-2e^{x+\ln x}}{x}$

$=\frac{2[(x+\ln x)-e^{x+\ln x}]+2-2x}{x}$. (8 分)

正确转换不等式得 3 分

令 $t=x+\ln x$，则其在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

取 $x=\frac{1}{e}$，则 $t=\frac{1-e}{e}<0$；取 $x=1$，则 $t=1>0$，

所以存在唯一 $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ 使得 $t=x_0+\ln x_0=0$，

令 $g(t)=e^t-t-1(t\in\mathbf{R})$，则 $g'(t)=e^t-1$.

当 $t<0$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减；

当 $t>0$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增；

所以 $g(t)\geqslant g(0)=0$，即 $e^t-t-1\geqslant0$，$e^t\geqslant t+1$.

故 $e^{x+\ln x}\geqslant x+\ln x+1$. (10 分)

正确利用换元法得到不等式的大小关系得 2 分

故 $(x+\ln x)-e^{x+\ln x}\leqslant(x+\ln x)-(x+\ln x+1)=-1$，

所以 $\frac{2[(x+\ln x)-e^{x+\ln x}]+2-2x}{x}\leqslant\frac{2\times(-1)+2-2x}{x}=-2$.

当且仅当 $x+\ln x=0$，即 $x=x_0$ 时，等号成立，

故 $a\geqslant-2$，即 $a$ 的取值范围为 $[-2,+\infty)$. (12 分)

正确求解 $a$ 的取值范围得 2 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。