★2021年3月22日下午

2021年河南省六市高三第一次联考

数学(理科)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分.考试时间为120分钟,其中第Ⅱ卷22题,23题为选考题,其它题为必考题.考试结束后,将答题卡交回.

注意事项:

1.答题前,考生必须将自己的姓名、准考证号码填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内.

2.选择题必须用2B铅笔填涂;非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写,字体工整、笔迹清楚.

3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题卷上答题无效.

4.保持卡面清洁,不要折叠、不要弄破、不准使用涂改液、刮纸刀.

第Ⅰ卷(选择题 共60分)

一、选择题: 本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的.

1.集合 $A=\{x\mid\frac{2x-1}{x+1}\leqslant 0\}$,集合 $B=\{x\mid y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1-x)}\}$,则集合 $A\cup B$ 等于

A.$[0,\frac{1}{2}]$　　B.$(-1,+\infty)$　　C.$(-1,1)$　　D.$[-1,+\infty)$

2.已知 i 是虚数单位,复数 z 满足 $\frac{(1-i)^2}{z}=1+i$,则 $|z|$ 等于

A.$\sqrt{2}$　　B.2　　C.1　　D.$\sqrt{5}$

3.等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$S_{15}=30$,$a_{10}=4$,则 a_9 等于

A.2　　B.3　　C.4　　D.8

4.为了得到函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象,需将函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{6}-2x)$ 的图象

A.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　B.向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C.向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度　　D.向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度

5.$2^{\frac{1}{3}}$,$\log_2 6$,$3\log_3 2$ 的大小关系是

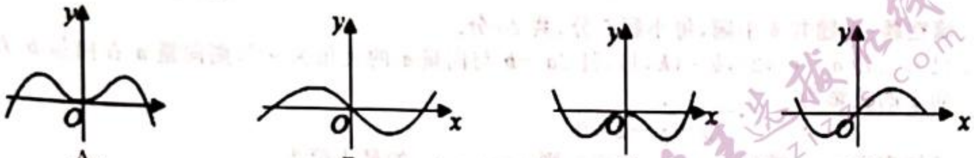
A.$2^{\frac{1}{3}}<\log_2 6<3\log_3 2$　　B.$2^{\frac{1}{3}}<3\log_3 2<\log_2 6$

C.$3\log_3 2<2^{\frac{1}{3}}<\log_2 6$　　D.$3\log_3 2<\log_2 6<2^{\frac{1}{3}}$

6.$(1-x)\cdot(x+\frac{1}{x}+2)^4$ 的展开式中 x 的系数是

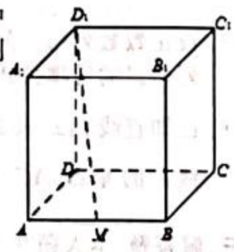
A.10　　B.2　　C.-14　　D.34

7.函数 $f(x)=(\frac{2}{1+e^x}-1)\sin x$ 的部分图象大致形状是



A.　　B.　　C.　　D.

8. 如图,在棱长为1正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为棱 AB 的中点,动点 P 在侧面 BCC_1B_1 及其边界上运动,总有 $AP\perp D_1M$,则动点 P 的轨迹的长度为



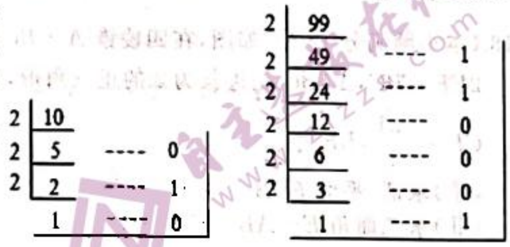
A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{5}}{2}$

C.$\frac{\pi}{16}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F,$M(x_0,\frac{1}{2})$ 为该抛物线上一点,若以 M 为圆心的圆与 C 的准线相切于点 A,$\angle AMF=120°$,过 F 且与 y 轴垂直的直线 l 与 C 交于 G、H 两点,P_0 为 C 的准线上的一点,则 $\triangle GHP_0$ 的面积为

A.1　　B.2　　C.4　　D.9

10.二进制是计算机技术中广泛采用的一种数制.二进制数据是用0和1两个数码来表示的数.它的基数为2,进位规则是"逢二进一",借位规则是"借一当二".当前的计算机系统使用的基本上是二进制系统,计算机中的二进制则是一个非常微小的开关,用1来表示"开",用0来表示"关".如图所示,把十进制数 $(10)_{10}$ 化为二进制数 $(1010)_2$,十进制数 $(99)_{10}$ 化为二进制数 $(1100011)_2$,把二进制数 $(10110)_2$ 化为十进制数为 $1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0=16+4+2=22$,随机取出1个不小于 $(100000)_2$,且不超过 $(111111)_2$ 的二进制数,其数码中恰有4个1的概率是



$(10)_{10}=(1010)_2$　　$(99)_{10}=(1100011)_2$

A.$\frac{9}{32}$　　B.$\frac{9}{31}$

C.$\frac{10}{31}$　　D.$\frac{5}{16}$

11.在三棱锥 $A-BCD$ 中,$AB=CD=4$,$AC=BD=AD=BC=3$,则该三棱锥的内切球的表面积为

A.$\frac{4\pi}{5}$　　B.17π　　C.$\frac{3\pi}{2}$　　D.$\frac{3\pi}{4}$

12.若函数 $f(x)=(2ax+\frac{\ln x}{x})\ln x-(a-1)x^3$ 有三个不同的零点,则实数 a 的取值范围是

A.$(0,\frac{4e^2+1}{4e^2-4e})$　　B.$(1,\frac{4e^2+1}{4e^2-4e})$

C.$(0,1)\cup(1,\frac{4e^2+1}{4e^2-4e})$　　D.$(0,1)\cup\{\frac{4e^2+1}{4e^2+4e}\}$

第Ⅱ卷 非选择题(共 90 分)

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(k,1)$,且 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $90°$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为________.

14. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x+y-2\geqslant 0\\3x-y-3\leqslant 0\\x-2y+4\geqslant 0\end{cases}$,则 $z=x-3y$ 的最小值为________.

15. 设正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n,且 $S_n+2T_n=1$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是________.

16. 已知直线 $l:x-\sqrt{3}y=0$ 交双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 于 A,B 两点,过 A 作直线 l 的垂线 AC 交双曲线 Γ 于点 C.若 $\angle ABC=60°$,则双曲线 Γ 的离心率为________.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

必考题:共 60 分.

17.(本小题满分 12 分)在△ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,

若 $\dfrac{\sqrt{2}c-b}{a}=\sin C\tan A-\cos C$.

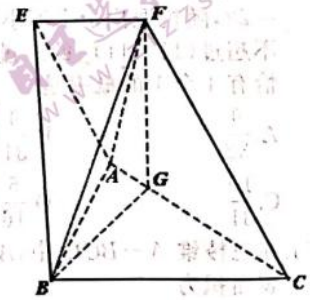
(Ⅰ)求角 A 的大小;

(Ⅱ)若 $b=3\sqrt{2}$,$c=2$,点 D 在边 BC 上,且 $CD=2DB$,求 a 及 AD.

18.(本小题满分 12 分)如图,在四棱锥 $A-BCFE$ 中,四边形 $EFCB$ 为梯形,$EF\parallel BC$,且 $2EF=BC$,ΔABC 是边长为 2 的正三角形,顶点 F 在 AC 上的射影为点 G,且 $FG=\sqrt{3}$,$CF=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$,$BF=\dfrac{5}{2}$.

(Ⅰ)求证:平面 $FGB\perp$ 平面 ABC;

(Ⅱ)求二面角 $E-AB-F$ 的余弦值.



19.(本小题满分 12 分)某种机器需要同时装配两个部件 S 才能正常运行,且两个部件互不影响,部件 S 有两个等级:一等品售价 5 千元,使用寿命为 5 个月或 6 个月(概率均为 0.5);二等品售价 2 千元,使用寿命为 2 个月或 3 个月(概率均为 0.5)

(Ⅰ)若从 4 件一等品和 2 件二等品共 6 件部件 S 中任取 2 件装入机器内,求机器可运行时间不少于 3 个月的概率;

(Ⅱ)现有两种购置部件 S 的方案,方案甲:购置 2 件一等品;方案乙:购置 1 件一等品和

2 件二等品.试从性价比(即机器正常运行时间与购置部件 S 的成本之比)角度考虑,选择哪一种方案更实惠.

20.(本小题满分 12 分)已知椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,且过点 $(0,2)$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)若矩形 $ABCD$ 的四条边均与椭圆相切,求该矩形面积的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=e^{x-1}-2\ln x+x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ)证明:$f(x)\geqslant(x-2)^3-3(x-2)$.

选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分 10 分)【选修 4—4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\varphi\\ y=1+t\sin\varphi\end{cases}$($t$ 为参数,$\varphi\in[0,\pi)$),以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴,建立极坐标系,圆 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos(\theta-\frac{\pi}{3})$.

(Ⅰ)求圆 C 的直角坐标方程;

(Ⅱ)设点 P 的坐标为 $P(1,1)$,若直线 l 与圆 C 相交于 A,B 两点,求 $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|$ 的最大值.

23.(本小题满分 10 分)【选修 4—5:不等式选讲】

已知 a,b,c 为正数,且 $a+b+c=2$,求证:

(Ⅰ)$ab+bc+ac\leqslant\frac{4}{3}$;

(Ⅱ)$\frac{2-a}{b}\cdot\frac{2-b}{c}\cdot\frac{2-c}{a}\geqslant 8$.

2021年河南省六市高三第一次联合调研检测
数学理科参考答案

一、选择题

1-5 CABDB 6-10 CCADA 11-12 DB

二、填空题

13. $-\frac{2\sqrt{145}}{29}$ 14. -7 15. $a_n=\begin{cases}\frac{1}{3}(n=1)\\ \frac{1}{4n^2-1}(n\geqslant 2)\end{cases}$ 16. $\sqrt{2}$

三、解答题

17.解:(Ⅰ)由正弦定理,原式可化为$\sqrt{2}\sin C-\sin B=\sin A(\sin C\tan A-\cos C)$,

即$\sqrt{2}\sin C-\sin(A+C)=\sin A(\sin C\tan A-\cos C)$, ………………………… 2分

$\therefore\sqrt{2}\sin C-\sin A\cos C-\cos A\sin C=\sin C\frac{\sin^2 A}{\cos A}-\sin A\cos C$,

$\because\sin C\neq 0$,$\therefore\frac{\sin^2 A}{\cos A}+\cos A=\sqrt{2}$, ………………………… 4分

即$1-\cos^2 A+\cos^2 A=\sqrt{2}\cos A$,

$\therefore\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又$0<A<\pi$,$\therefore A=\frac{\pi}{4}$. ………………………… 6分

(Ⅱ)由余弦定理可得:$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=18+1-12=10$,

$\therefore a=\sqrt{10}$, ………………………… 8分

$\because$点D在边BC上,且$CD=2DB$,$\therefore BD=\frac{a}{3}=\frac{\sqrt{10}}{3}$,

又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$. ………………………… 10分

$\therefore AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=\frac{58}{9}$,$\therefore AD=\frac{\sqrt{58}}{3}$. ………… 12分

18.(Ⅰ)证明:由顶点F在AC上投影为点G,可知,$FG\perp AC$.取AC的中点为O,连结OB,GB.

在$Rt\Delta FGC$中,$FG=\sqrt{3}$,$CF=\frac{\sqrt{21}}{2}$,$\therefore CG=\frac{3}{2}$. ………………………… 1分

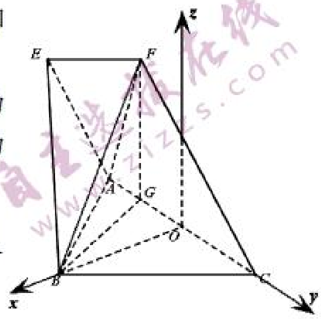
在$Rt\Delta GBO$中,$OB=\sqrt{3}$,$OG=\frac{1}{2}$,$\therefore BG=\frac{\sqrt{13}}{2}$. ………………………… 2分

$\because BG^2+GF^2=FB^2$,$\therefore FG\perp BG$. ………………………… 3分

$\because FG\perp AC, FG\perp GB, AC\cap BG=G \therefore FG\perp$ 面 ABC. 又 $FG\subseteq$ 面 FGB,

$\therefore$ 面 $FGB\perp$ 面 ABC. ·· 5 分

(Ⅱ)解：$\because O$ 是 AC 的中点，$\therefore OB\perp AC$，由(Ⅰ)知 $OB\perp FG$



$\therefore OB\perp$ 面 AFC，且 $FG\perp$ 面 ABC. 以 OB 所在直线为 x 轴，OC 所在直线为 y 轴，过点 O 作平面 ABC 的垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示：

$A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$F(0,-\frac{1}{2},\sqrt{3})$，$E(\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BA}=(-\sqrt{3},-1,0)$.

$\overrightarrow{BE}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\sqrt{3})$ ·· 8 分

设平面 ABE、ABF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，

解得：$\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},-\frac{1}{2})$，·· 9 分

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，解得：$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\frac{1}{2})$，·· 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{15}{17}$，

$\therefore$ 二面角 $E-AB-F$ 的余弦值为 $\frac{15}{17}$. ·· 12 分

19. 解：(Ⅰ)由题意知机器运行时间不少于3个月，共有三种可能：········ 1 分

第一，取到2个一等品，对应概率为 $\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$.

第二，取到1个一等品，1个二等品，且二等品的使用寿命为3个月，对应概率为 $\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$.

第三，取到2个二等品，且二者使用寿命均为3个月，对应概率为：$\frac{C_2^2}{C_6^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{60}$，

$\therefore$ 机器可运行时间不少于3个月的概率 $P=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}+\frac{1}{60}=\frac{41}{60}$. ·············· 5 分

(Ⅱ)若采用甲方案，则机器正常运行的时间为 X(单位：月)，

则 X 的可能取值为 5，6，

$P(X=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(X=5)=1-P(X=6)=\frac{3}{4}$,

则 X 的分布列为:

X	5	6
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore E(X)=5\times\frac{3}{4}+6\times\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$,它与成本价之比为 $\frac{E(X)}{5+5}=\frac{21}{40}$, …………… 7 分

若采用方案乙,两个二等品的使用寿命之和 Y(单位:月),

Y 的可能取值为 4,5,6.

$P(Y=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(Y=5)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,$P(Y=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

则 Y 的分布列为:

Y	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

……………………………………………………………………………… 9 分

记 M 为一等品的使用寿命(单位:月),此时机器的正常运行时间为 Z,

则 Z 的可能取值为 4,5,6,

$P(Z=4)=P(Y=4)=\frac{1}{4}$,

$P(Z=5)=P(M=5,Y\geqslant5)+P(M=6,Y=5)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$,

$P(Z=6)=P(M=y=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

Z 的分布列为:

Z	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(Z)=4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{5}{8}+6\times\frac{1}{8}=\frac{39}{8}$,它与成本价之比为 $\frac{E(Z)}{5+2+2}=\frac{13}{24}$, … 11 分

$\because\frac{21}{40}<\frac{13}{24}$,

$\therefore$ 从性价比角度考虑,方案乙更实惠. ………………………………………… 12 分

20.解：（Ⅰ）$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore a^2=4b^2$

又椭圆 C 过点 $(0,2)$，$\therefore a^2=4,b^2=1$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程：$\frac{y^2}{4}+x^2=1$ …………………………………………………… 3 分

（Ⅱ）①当矩形的一边与坐标轴平行时，易知 $S=8$，…………………………… 4 分

②当矩形的各边均不与坐标轴平行时，由矩形及椭圆的对称性，设其中一边所在的直线方程为：$y=kx+m$，则其对边所在的直线方程为：$y=kx-m$，

另外两边所在的直线方程分别为：$y=-\frac{1}{k}x+n$，$y=-\frac{1}{k}x-n$， ………… 5 分

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\4x^2+y^2=1\end{cases}$ 整理可得：$(4+k^2)x^2+2kmx+m^2-4=0$，由题意可得 $\triangle=0$，整理可得 $k^2+4=m^2$.

设矩形与直线 $y=kx+m$ 对应的一条边长为 d_1，则 $d_1=\frac{|2m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

同理可得 $\frac{1}{k^2}+4=n^2$，设矩形相邻的另一条边长为 d_2，则 $d_2=\frac{|2n|}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}$， … 8 分

所以矩形的面积 $S=d_1\cdot d_2=\frac{|2m|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{|2n|}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}=\frac{4|mnk|}{1+k^2}$

$=4\cdot\sqrt{\frac{(1+4k^2)(4+k^2)}{(1+k^2)^2}}=4\cdot\sqrt{\frac{4k^4+17k^2+4}{(1+k^2)^2}}=4\cdot\sqrt{\frac{4(1+k^2)^2+9k^2}{(1+k^2)^2}}$ …… 10 分

$=4\cdot\sqrt{4+\frac{9k^2}{k^4+2k^2+1}}=4\cdot\sqrt{4+\frac{9}{k^2+\frac{1}{k^2}+2}}$. 因为 $k^2>0$，所以 $k^2+\frac{1}{k^2}\geq2$，当且仅当 $k^2=1$ 时取等号. 所以 $\frac{9}{k^2+\frac{1}{k^2}+2}\in(0,\frac{9}{4}]$. 所以 $\sqrt{4+\frac{9}{k^2+\frac{1}{k^2}+2}}\in(2,\frac{5}{2}]$，所以 $S\in(8,10]$.

综上所述：该矩形面积的取值范围为 $[8,10]$. ……………………………… 12 分

21. 解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=e^{x-1}-\frac{2}{x}+1$，

易知 $f'(x)=e^{x-1}-\frac{2}{x}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(1)=0$，………… 3 分

令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<1$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$；

令 $f'(x)>0$，解得 $x>1$，则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$； ………… 4 分

(Ⅱ)证明：设 $g(x)=(x-2)^3-3(x-2)(x>0)$，$g'(x)=3(x-1)(x-3)$，

令 $g'(x)<0$，解得 $1<x<3$，令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<1$ 或 $x>3$，

∴当 $x=1$ 时，$g(x)$取得极大值，且极大值为 2，

由(1)知，$f(x)_{\min}=f(1)=2$，

故当 $0<x\leqslant 3$ 时，$f(x)\geqslant(x-2)^3-3(x-2)$成立。 ………………………… 6 分

当 $x>3$ 时，设 $h(x)=f(x)-g(x)=e^{x-1}-2\ln x-(x-2)^3+4x-6$，

则 $h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{2}{x}-3(x-2)^2+4$.

设 $p(x)=h'(x)$，$p'(x)=e^{x-1}+\dfrac{2}{x^2}-6(x-2)$.

设 $q(x)=p'(x)$. 则 $q'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x^3}-6$，………………………………… 8 分

易知 $q'(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，

∴$q'(x)>q'(3)=e^2-\dfrac{1}{27}-6>0$，则 $q(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，

从而 $p'(x)>p'(3)=e^2+\dfrac{2}{9}-6>0$，则 $h'(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，

所以 $h'(x)>h'(3)=e^2+\dfrac{1}{3}>0$，则 $h(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，

于是 $h(x)>h(3)=e^2+5-2\ln 3>0$，故当 $x>3$ 时，$f(x)\geqslant(x-2)^3-3(x-2)$；

综上，$f(x)\geqslant(x-2)^3-3(x-2)$.……………………………………………… 12 分

22.解：(Ⅰ)圆 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos(\theta-\dfrac{\pi}{3})$.

则 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\sqrt{3}\rho\sin\theta$，

由极坐标与直角坐标的转化公式得圆 C 的直角坐标方程是：$x^2+y^2=2x+2\sqrt{3}y$，

即 $x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y=0$. …………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=1+t\cos\varphi\\y=1+t\sin\varphi\end{cases}$($t$ 为参数)，

代入 $x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y=0$ 得：

$t^2-2(\sqrt{3}-1)\sin\varphi\cdot t-2\sqrt{3}=0$，

设点 A，B 所对应的参数分别为 t_1 和 t_2，

则 $t_1+t_2=2(\sqrt{3}-1)\sin\varphi$，$t_1\cdot t_2=-2\sqrt{3}$，

则 $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{4(\sqrt{3}-1)^2\sin^2\varphi+8\sqrt{3}}$，

当 $\sin\varphi=1$ 时，$|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|$的最大值为 4. ………………………………… 10 分

23.证明：(Ⅰ)将 $a+b+c=2$ 平方得：$a^2+b^2+c^2+2ab+2ab+2ac=4$，… 1 分

由基本不等式知：$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$a^2+c^2\geqslant 2ac$，

三式相加得：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$，…………………………………………3 分

则 $4=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\geqslant 3ab+3bc+3ac$，

$ab+bc+ac\leqslant\frac{4}{3}$，当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$ 时等号成立 ……………………… 5 分

（Ⅱ）由 $\frac{2-a}{b}=\frac{b+c}{b}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{b}$，同理 $\frac{2-b}{c}=\frac{a+c}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{ac}}{c}$，$\frac{2-c}{a}=\frac{b+a}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{ba}}{a}$，

………………………………………………………………………………………… 7 分

则 $\frac{2-a}{b}\cdot\frac{2-b}{c}\cdot\frac{2-c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ac}}{c}\cdot\frac{2\sqrt{ba}}{a}=8$，

即 $\frac{2-a}{b}\cdot\frac{2-b}{c}\cdot\frac{2-c}{a}\geqslant 8$．当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$ 时等号成立.…………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》