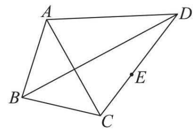
2022-2023 学年度第二学期 6 月份学情检测
数学答案

一、单项选择题：D C B D　　D B C B

【参考解法（不唯一）】7.C【详解】如图所示，因为 $AC\perp BD$，且 $AB=BC$，所以 BD 垂直且平分 AC，则 $\triangle ACD$ 为等腰三角形，又 $AC=CD=\sqrt{3}$，所以 $\triangle ACD$ 为等边三角形，则四边形 $ABCD$ 关于直线 BD 对称，故点 E 在四边形 $ABCD$ 上运动时，只需考虑点 E 在边 BC,CD 上的运动情况即可，因为 $AB=BC=\dfrac{BD}{2}=1$，$CD=\sqrt{3}$，知 $BC^2+CD^2=BD^2$，即 $BC\perp CD$，则 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，

①当点 E 在边 BC 上运动时，设 $\overrightarrow{EB}=\lambda\overrightarrow{CB}(0\le\lambda\le1)$，则 $\overrightarrow{EC}=(\lambda-1)\overrightarrow{CB}$，则

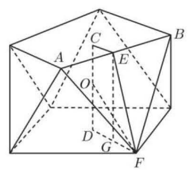


$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EB}\cdot(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD})=\lambda\overrightarrow{CB}\cdot(\lambda-1)\overrightarrow{CB}=\lambda(\lambda-1)\overrightarrow{CB}^2=\lambda(\lambda-1)=\lambda^2-\lambda$，当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}$ 最小值为 $-\dfrac{1}{4}$；

②当点 E 在边 CD 上运动时，

设 $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{CD}(0\le k\le1)$，则 $\overrightarrow{EC}=(k-1)\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{ED}=k(k-1)\overrightarrow{CD}^2+k\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}$ $=3k^2-3k$，当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}$ 的最小值为 $-\dfrac{3}{4}$；综上，$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}$ 的最小值为 $-\dfrac{3}{4}$；

8.B 如图所示：设上下底面的中心分别为 A,B，设该"四角反棱柱"外接球的球心是 O，显然 O 是 AB 的中点，设 AB 的中点为 E，连接 EF，DF，过 E 做 $EG\perp DF$，垂足为 G，



因为 $DG=CE=\dfrac{1}{2}\times2=1$，$DF=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$，所以 $DG=DF-DG=\sqrt{2}-1$，

在直角三角形 EGF 中，$EG^2=EF^2-GF^2=3-(\sqrt{2}-1)^2=2\sqrt{2}$，

所以有 $CD=EG=\sqrt{2\sqrt{2}}$，于是有 $OD=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$，在直角三角形 ODF 中，

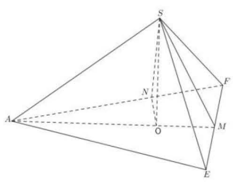
$OF^2=OD^2+DF^2=\dfrac{2\sqrt{2}}{4}+2$，

所以该"四角反棱柱"外接球的表面积等于 $4\pi\cdot OF^2=4\pi(\dfrac{2\sqrt{2}}{4}+2)=(2\sqrt{2}+8)\pi$，

二、多项选择题：9.B C；　10.BC；　11.A C D；　12.BD

12.BD　【详解】如图，作 EF 的中点 M，连结 AM、SM，过 S 作 AM 的垂线交 AM 于点 O，连结 SO，过 O 作 AF 的垂线交 AF 于点 N，连结 SN

由题知 AE=AF=$\sqrt{5}$，所以 AM$\perp EF$，SE=SF=1，所以 $SM\perp EF$，



$\therefore\angle SMA$ 为平面 SEF 与平面 AEF 的二面角的平面角

又 $SM\cap AM=M$　$\therefore EF\perp$ 平面 ASM，$SO\subset$ 平面 ASM，$\therefore EF\perp$ SO，

作法知 $SO\perp AM$，$AM\cap EF=M$，$\therefore SO\perp$ 平面 AEF，

所以 SO 为锥体的高．所以 O 为 S 在平面 AEF 上的射影．$AF\subset$ 平面 AEF，所以 $SO\perp AF$，

由作法知 $ON\perp AF$，$SO\cap NO=O$ $\therefore AF\perp$ 平面 SON，$SN\subset$ 平面 SON，$\therefore SN\perp AF$

$\therefore\angle SNO$ 为平面 SAF 与平面 AEF 的二面角的平面角，显然 $\angle SNO$ 为锐角，故 A 错．

由题知 $\left.\begin{array}{l}AS\perp SE\\AS\perp SF\\SE\cap SF=S\end{array}\right\}\Rightarrow AS\perp \text{平面}SEF$，$SM\subset\text{平面}SEF$，$\therefore AS\perp SM$

又 AS＝2，$EM=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，SE＝1，$\therefore SM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$AM=\sqrt{AE^2-EM^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$SO=\dfrac{AS\times SM}{AM}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2}{3}$，四面体 S−AEF 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle AEF}\times SO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，故 B 正确．

在直角三角形 ASM 中：$\tan\angle SMA=\dfrac{AS}{SM}=\dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$ 故 C 不正确．

因为$OM=\sqrt{SM^2-SO^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，$AO=AM-OM=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，$OE=\sqrt{OM^2+EM^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

所以$\cos\angle EOF=\frac{OE^2+OF^2-EF^2}{2OE\cdot OF}=-\frac{4}{5}$，$\cos\angle EOA=\frac{OE^2+OA^2-AE^2}{2OE\cdot OA}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OE}\cdot\left(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}\right)=\left|\overrightarrow{OE}\right|\left|\overrightarrow{OF}\right|\cos\angle EOF-\left|\overrightarrow{OE}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|\cos\angle EOA=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$=-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=0$ $\therefore OE\perp AF$，由对称性知$OF\perp AE$，又AM⊥EF 故D正确.

三、填空题．13．$\frac{\sqrt{35}}{3}\pi$　　14．$-\frac{5}{7}$　　15．$\frac{1}{3}$　　16．$\frac{8\sqrt{3}}{3}+4$　$\left[-3,-\frac{5}{2}\right)$.

16.【详解】(1)由AM是$\angle CAB$的平分线，得$\angle CAM=\angle BAM=30°$，又$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CAM}+S_{\triangle BAM}$，

即$\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times2\times b\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times2\times c\times\sin\frac{\pi}{6}$，化简得$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore AC+3AB=b+3c=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(b+3c)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(4+\frac{3c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\left(4+2\sqrt{\frac{3c}{b}\times\frac{b}{c}}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}+4$，

当且仅当$\frac{3c}{b}=\frac{b}{c}$，即$c=\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$b=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，取等号.

(2)$\because A=\frac{\pi}{3},B+C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$

$=\cos\angle AOB+\cos\angle AOC-2=\cos2C+\cos2B-2=\cos2\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)+\cos2B-2$

$=\frac{1}{2}\cos2B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2B-2=\cos\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)-2$，$\because\triangle ABC$是锐角三角形，$\therefore\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，

$\therefore\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}<2B+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$ $\therefore-1\leq\cos\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\in\left[-3,-\frac{5}{2}\right)$.

四、解答题

17.（1）$z_1=\frac{2m^2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=m^2+m^2\cdot i$，$z_2=2m-3+(m-6)\cdot i$，

所以$z_1+z_2=m^2+2m-3+\left(m^2+m-6\right)i$，因为$z_1+z_2$是纯虚数，所以$\begin{cases}m^2+2m-3=0\\m^2+m-6\neq0\end{cases}$，得$m=1$.

（2）由（1）知，$z_1+z_2=m^2+2m-3+\left(m^2+m-6\right)i$，因为$z_1+z_2>0$，所以$\begin{cases}m^2+2m-3>0\\m^2+m-6=0\end{cases}$，得$m=2$，

所以$z_1=4+4i$，$z_2=1-4i$，所以$z_1\cdot z_2=(4+4i)(1-4i)=20-12i$.

18.（1）证明：$\because AB=BC$，D，E分别为AC，A_1C_1的中点，

$\therefore AC\perp DB$，且$DE//AA_1$，又$AA_1\perp$平面ABC，$\therefore DE\perp$平面ABC，又$AC\subset$平面ABC，$\therefore AC\perp DE$，

又$AC\perp DB$，且$DE\cap DB=D$，$DE,DB\subset$平面BDE，$\therefore AC\perp$平面BDE.

（2）$\because AC\perp DB$，$AB=\sqrt{5}$，$AC=2AD=2$，$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=2$，

$\therefore BE=\sqrt{DE^2+BD^2}=2\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{DE^2+AD^2}=\sqrt{5}$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

在$\triangle ABE$中，$AB=AE=\sqrt{5}$，$BE=2\sqrt{2}$，$\therefore BE$边上的高为$\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$. 设点D到平面ABE的距离为d，

根据$V_{D-ABE}=V_{E-ABD}$，得$\frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times d=\frac{1}{3}\times1\times2$，解得$d=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以点D到平面ABE的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

19.【详解】（1）因为D为BC的三等分点（靠近C点），所以$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$，

所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{2}{3}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\times9+\frac{2}{3}\times4-\frac{1}{3}\times3\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}$.

（2）因为$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CA}$，所以$\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{AC}$，因为$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+(\lambda-1)\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\left[\overrightarrow{AB}+(\lambda-1)\overrightarrow{AC}\right]\cdot\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\lambda(\lambda-1)|\overrightarrow{AC}|^2$

$=\lambda|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\frac{2\pi}{3}+\lambda(\lambda-1)|\overrightarrow{AC}|^2=-3\lambda+4\lambda(\lambda-1)=4\lambda^2-7\lambda=4(\lambda-\frac{7}{8})^2-\frac{49}{16}$，

所以当$\lambda=\frac{7}{8}$时，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$取得最小值$-\frac{49}{16}$.

20.（1）$\because A,B,D,E$四点共圆，$\angle ABD=60^\circ$，$\therefore\angle AED=120^\circ$，$\because\cos\angle EDA=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，$\therefore\sin\angle EDA=\sqrt{1-\cos^2\angle EDA}=\frac{\sqrt{21}}{14}$；

在$\triangle ADE$中，由正弦定理得：$\frac{AE}{\sin\angle EDA}=\frac{AD}{\sin\angle AED}$，

$\because AE=2$，$\angle AED=120^\circ$，$\sin\angle EDA=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\therefore AD=\frac{AE\cdot\sin\angle AED}{\sin\angle EDA}=2\sqrt{7}$；

在$\triangle ABD$中，由余弦定理知：$AD^2=BD^2+AB^2-2AB\cdot DB\cos\angle ABD$，

即$DB^2-2DB-24=0$，解得：$DB=6$或$DB=-4$（舍），$\therefore AD+DB=6+2\sqrt{7}$.

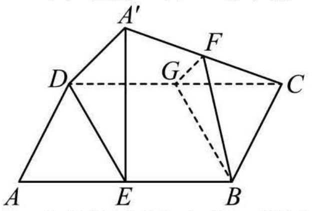
（2）在$\triangle BCD$中，$\angle BCD=135^\circ$，$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}CB\cdot CD\sin135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}CB\cdot CD$；

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得：$DB^2=CD^2+BC^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$，

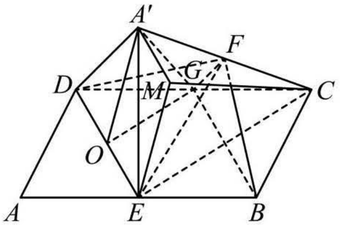
$\therefore 36=CD^2+CB^2+\sqrt{2}CB\cdot CD\geq\left(2+\sqrt{2}\right)CB\cdot CD$（当且仅当$CB=CD$时取等号），

$\therefore CB\cdot CD\leq\frac{36}{2+\sqrt{2}}=18\left(2-\sqrt{2}\right)$，$\therefore S_{\triangle BCD}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}\times18\left(2-\sqrt{2}\right)=9\sqrt{2}-9$，即$\triangle BCD$区域面积的最大值为$9\sqrt{2}-9$.

21.（1）证明：取CD的中点G，连接FG，BG，



$\because F$为线段$A'C$的中点，$\therefore GF\,//\,A'D$，$\because FG\not\subset$平面$A'DE$，$A'D\subset$平面$A'DE$，$\therefore GF\,//$平面$A'DE$，又$DG\,//\,BE$，$DG=BE$，$\therefore$四边形$BEDG$为平行四边形，则$BG\,//\,DE$. $BG\not\subset$平面$A'DE$，$DE\subset$平面$A'DE$，可得$BG\,//$平面$A'DE$，又$BG\cap GF=G$，BG，$GF\subset$平面BFG，可得平面$A'DE\,//$平面BFG，$BF\subset$平面BFG，则$BF\,//$面$A'DE$.



（2）取DC中点G，DE中点O，连接OG，$A'O$，$A'G$，由$AB=2BC=8\sqrt{3}$，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，E为边AB的中点，

得$AE=AD=4\sqrt{3}$，所以$\triangle ADE$为等边三角形，从而$DE=4\sqrt{3}$，$\angle EDC=60^\circ$，又$DG=4\sqrt{3}$，O为DE的中点所以$OG\perp DE$，又$\triangle A'DE$是等边三角形，所以$A'O\perp DE$，所以$\angle A'OG$为二面角$A'-DE-C$的平面角，所以$\angle A'OG=60^\circ$，

过点E作$EM\,//\,OA'$，过A'作$A'M\,//\,OE$交于M，连接CM，$\because\triangle A'DE$是等边三角形，所以可求得$A'O=6$，$OE=2\sqrt{3}$，

所以 $EM=6$，$A'M=2\sqrt{3}$，$\because DE\perp A'O$，$DE\perp OG$，$OG\,//\,CE$，$EM\,//\,A'O$，所以 $DE\perp EM$，$DE\perp EC$，又 $EC\cap EM=E$，EC，$EM\subset$ 面 EMC，所以 $DE\perp$ 面 EMC，又 $A'M\,//\,DE$，所以 $A'M\perp$ 面 EMC，$\because A'M\subset$ 平面 $A'DE$，所以面 $A'DE\perp$ 面 EMC，由 $ME=6$，在 $\triangle CBE$ 中易求得 $CE=12$，又 $\angle MEC=\angle A'OG=60^\circ$,所以 $MC\perp EM$，$MC=6\sqrt{3}$，面 $A'DE\cap$ 面 $EMC=EM$，$MC\subset$ 面 EMC，所以 $MC\perp$ 面 $A'DE$，所以 $\angle MA'C$ 为 $A'C$ 与平面 $A'DE$ 所成的角，

在 $Rt\triangle A'MC$ 中可求得 $A'C=2\sqrt{30}$，所以 $\sin\angle MA'C=\dfrac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{30}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\therefore A'C$ 与面 $A'ED$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

22.【详解】(1) 在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理 $\cos A=\dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+2^2-BD^2}{2\times2\sqrt{3}\times2}$，即 $\sqrt{3}\cos A=\dfrac{16-BD^2}{8}$ ①，

同理，在 $\triangle BCD$ 中，$\cos C=\dfrac{2^2+2^2-BD^2}{2\times2\times2}$，即 $\cos C=\dfrac{8-BD^2}{8}$ ②，

①−②得 $\sqrt{3}\cos A-\cos C=1$，所以当 BD 长度变化时，$\sqrt{3}\cos A-\cos C$ 为定值，定值为 1；

(2) A，B 为 $\triangle ABC$ 的内角，则 $1+\sin A>0$ 则由 $\dfrac{\cos A}{\tan B}=1+\sin A$，可得 $\dfrac{\cos A}{\tan B}>0$，则 A、B 均为锐角

$$\tan B=\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2})^2}=\frac{1-\tan\frac{A}{2}}{1+\tan\frac{A}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$$

又 $0<B<\dfrac{\pi}{2},0<\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{4}$，则 $B=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A}{2}$，$0<B<\dfrac{\pi}{4}$ 则 $A=\dfrac{\pi}{2}-2B$，则 $\sin A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2B\right)=\cos 2B$

则 $\dfrac{a\sin B+b\sin A}{2b\cos B}=\dfrac{2b\sin A}{2b\cos B}=\dfrac{2b\cos 2B}{2b\cos B}=\dfrac{2\cos^2 B-1}{\cos B}=2\cos B-\dfrac{1}{\cos B}$

令 $t=\cos B\left(0<B<\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<1$

又 $f(t)=2t-\dfrac{1}{t}$ 在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 单调递增，$f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=0$，$f(1)=1$

可得 $0<2t-\dfrac{1}{t}<1$，则 $2\cos B-\dfrac{1}{\cos B}$ 的取值范围为 $(0,1)$，

则 $\dfrac{a\sin B+b\sin A}{2b\cos B}$ 的取值范围为 $(0,1)$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线