七校联合体2024届高三第一次联考试卷（8月）

数学科目

命题学校：潮阳一中　命题人：姚超　审题人：马文燕

一、单选题（本题共8小题，每小题5分，共40分）

1．已知集合$A=\{-1，0，1\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，则$A\cap B$的子集个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．若复数z满足$z\cdot(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}+3$（i是虚数单位），则$\mathrm{i}\cdot\bar{z}$的模长等于（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{5}$

3．已知向量$\vec{a}=(1,t),\vec{b}=(-3,1)$，且$(2\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$等于（　）

A．5　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$2\sqrt{7}$　　D．$2\sqrt{6}$

4．函数$f(x)=2|x-a|+3$在区间$[1,+\infty)$上不单调，则a的取值范围是(　)

A．$[1,+\infty)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,1)$　　D．$(-\infty,1]$

5．已知F_1、F_2是椭圆的两个焦点，满足$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$的点$M$总在椭圆内部，则椭圆离心率的取值范围是（　）.

A．$(0,\frac{1}{2})$　　B．$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　C．$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D．$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

6．已知$\tan^2\theta-4\tan\theta+1=0$，则$\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{5}$

7　在等比数列$\{a_n\}$中，公比为q.已知$a_1=1$，则$0<q<1$是数列$\{a_n\}$单调递减的（　）条件

A．充分不必要　　B．必要不充分　　C．充要　　D．既不充分又不必要

8．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+2\varphi)-2\sin\varphi\cos(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$\varphi\in\mathbf{R}$）在$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递增，则$\omega$的取值范围是（　）

A．$\left(0,\frac{1}{3}\right]$　　B．$\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$　　C．$\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$　　D．$\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$

二、多选题（本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分.）

9．下列说法正确的是（　）

A．数据1，2，3，3，4，5的平均数和中位数相同

B．数据6，5，4，3，3，3，2，2，1的众数为3

C．有甲、乙、丙三种个体按3：1：2的比例分层抽样调查，如果抽取的甲个体数为9，则样本容量为30

D．甲组数据的方差为4，乙组数据为5，6，9，10，5，则这两组数据中较稳定的是乙组

10. 尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学家经过研究，已经对地震有所了解，例如，地震时释放的能量E（单位：焦耳）与地震里氏震级M之间的关系为$\lg E=4.8+1.5M$，则下列说法正确的是（　）

A. 地震释放的能量为$10^{15.3}$焦耳时，地震里氏震级为七级

B. 八级地震释放的能量为七级地震释放的能量的6.3倍

C. 八级地震释放的能量为六级地震释放的能量的1000倍

D. 记地震里氏震级为$n(n=1,2,\cdots,9)$，地震释放的能量为$f(n)$，则$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=10^{1.5}$

11. 若函数$f(x)$同时满足：（1）对于定义域内的任意x，有$f(x)+f(-x)=0$；（2）对于定义域内的任意x_1，x_2，当$x_1\neq x_2$时，有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则称函数$f(x)$为"理想函数".给出下列四个函数是"理想函数"的是（　）

A. $f(x)=x^2$　　　　B. $f(x)=-x^3$

C. $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　　　D. $f(x)=\begin{cases}-x^2,x\geq 0\\ x^2,x<0\end{cases}$

12. 已知四面体$ABCD$的所有棱长均为2，则下列结论正确的是（　）

A. 异面直线AC与BD所成角为$60°$　　　　B. 点A到平面BCD的距离为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

C. 四面体$ABCD$的外接球体积为$\sqrt{6}\pi$

D. 动点P在平面BCD上，且AP与AC所成角为$60°$，则点P的轨迹是椭圆

三. 填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 某医院传染病科室有5名医生．4名护士，现从这9名医护人员中选取5名参加医院组织的运动会，要求其中至少有2名医生．2名护士，则不同的选取方法有______种.

14. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M为侧棱BB_1上一点，且$\overrightarrow{B_1M}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{B_1B}$，平面$A_1DM$将该正方体分成两部分，其体积分别为$V_1,V_2,(V_1<V_2)$，则$\dfrac{V_1}{V_2}=$__________.

15. 已知函数$y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$的图象与函数$y=kx-2$的图象恰有两个交点，则实数k的取值范围是__________

16. 已知点D在线段AB上，CD是$\triangle ABC$的角平分线，E为CD上一点，且满足$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)(\lambda>0)$，$|\overrightarrow{CA}|-|\overrightarrow{CB}|=6$，$|\overrightarrow{BA}|=14$，设$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，则$\overrightarrow{BE}$在$\vec{a}$上的投影向量为__________.（结果用$\vec{a}$表示）.

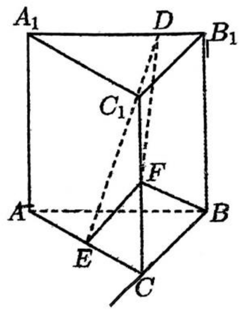
四. 解答题

17.（10分）已知锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，$\dfrac{\sqrt{3}c}{b\cos A}=\tan A+\tan B$.

(1)求B；

(2)若$c=4$，求$\triangle ABC$面积的取值范围.

18.（12分）已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面AA_1B_1B为正方形，$AB=BC=2$，E，F分别为AC和CC_1的中点，D为棱A_1B_1上的点．$BF\perp A_1B_1$



（1）证明：$BF\perp DE$；

（2）当B_1D为何值时，面BB_1C_1C与面DEF所成的二面角的正弦值最小？

19.（12分）设a为实数，函数$f(x)=x^3-3x^2+a$，$g(x)=x\ln x$.

(1)求$f(x)$的极值；

(2)对于$\forall x_1\in[1,3]$，$\forall x_2\in\left[\dfrac{1}{e},e\right]$，都有$f(x_1)\geq g(x_2)$，试求实数$a$的取值范围.

20.（12分）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_2=11,S_{10}=40$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{|a_n|\}$的前n项和T_n.

21.（12分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为2，且经过点$P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)经过椭圆右焦点F且斜率为$k(k\neq 0)$的动直线l与椭圆交于A、B两点，试问x轴上是否存在异于点F的定点T使$|AF|\cdot|BT|=|BF|\cdot|AT|$恒成立？若存在，求出$T$点坐标，若不存在，说明理由.

22．规定抽球试验规则如下：盒子中初始装有白球和红球各一个，每次有放回的任取一个，连续取两次，将以上过程记为一轮．如果每一轮取到的两个球都是白球，则记该轮为成功，否则记为失败．在抽取过程中，如果某一轮成功，则停止；否则，在盒子中再放入一个红球，然后接着进行下一轮抽球，如此不断继续下去，直至成功．

(1)某人进行该抽球试验时，最多进行三轮，即使第三轮不成功，也停止抽球，记其进行抽球试验的轮次数为随机变量X，求X的分布列和数学期望；

(2)为验证抽球试验成功的概率不超过$\frac{1}{2}$，有1000名数学爱好者独立的进行该抽球试验，记t表示成功时抽球试验的轮次数，y表示对应的人数，部分统计数据如下：

t	1	2	3	4	5
y	232	98	60	40	20

求y关于t的回归方程$\hat{y}=\frac{\hat{b}}{t}+\hat{a}$，并预测成功的总人数（精确到1）；

（3）证明：$\frac{1}{2^2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1}{3^2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\frac{1}{4^2}+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{2}$

附：经验回归方程系数：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$；

参考数据：$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=1.46$，$\bar{x}=0.46$，$\bar{x}^2=0.212$（其中$x_i=\frac{1}{t_i}$，$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i$）．

七校联合体 2024 届高三第一次联考试卷（8 月）

数学科目（答案）

DDAB　　BCCD

8.【详解】根据正弦和角与差角公式化简函数式可得

$f(x)=\sin(\omega x+2\varphi)-2\sin\varphi\cos(\omega x+\varphi)=\sin\left[(\omega x+\varphi)+\varphi\right]-2\sin\varphi\cos(\omega x+\varphi)$

$=\sin(\omega x+\varphi)\cos\varphi+\cos(\omega x+\varphi)\sin\varphi-2\sin\varphi\cos(\omega x+\varphi)=\sin(\omega x+\varphi)\cos\varphi-\cos(\omega x+\varphi)\sin\varphi$

$=\sin(\omega x+\varphi-\varphi)=\sin\omega x$，（$\omega>0$，$\varphi\in\mathbf{R}$）.

根据正弦函数单调递增区间可知 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，（$k\in Z$）上单调递增，

化简得 $-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\le x\le\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}$，$k\in Z$；∴函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right]$，（$k\in Z$）.

∵在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减，可得 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\le\pi\\ \frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\ge\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\omega\ge-\frac{1}{2}+2k\\ \omega\le\frac{1}{3}+\frac{4k}{3}\end{cases}$，（$k\in Z$）.又 $\omega>0$，

当 $k=0$ 时，可得 $0<\omega\le\frac{1}{3}$；当 $k=1$ 时，可得 $\frac{3}{2}\le\omega\le\frac{5}{3}$.故选：D.

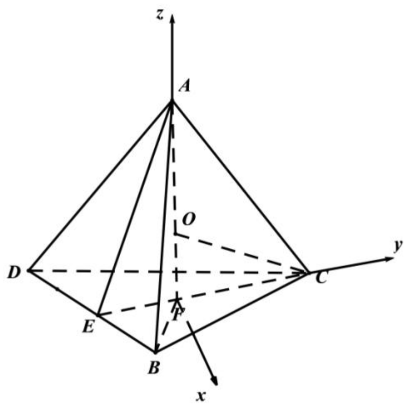
9．AB　　10．ACD.　　11．BCD

11.对于 D：$f(x)=\begin{cases}-x^2,x\ge0\\x^2,x<0\end{cases}=-x|x|$，$f(-x)=x|x|=-f(x)$，所以 $f(x)=\begin{cases}-x^2,x\ge0\\x^2,x<0\end{cases}$ 是奇函数；

根据二次函数的单调性，易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 都是减函数，且在 $x=0$ 处连续，所以 $f(x)=\begin{cases}-x^2,x\ge0\\x^2,x<0\end{cases}$ 在 R 上是减函数，所以是“理想函数”.12．BC

12.【详解】取 BD 中点 E,连接 AE,CE,可得 $BD\perp$ 面 ACE,则 $AC\perp BD$,故 A 错误；

在四面体 $ABCD$ 中，过点 A 作 $AF\perp$ 面 BCD 于点 F,则 F 为为底面正三角形 BCD 的重心，因为所有棱长均为 2, $AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$,即点 A 到平面 BCD 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$,故 B 正确；



设 O 为正四面体的中心则 OF 为内切球的半径，OA 我外接球的半径，

因为 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AF=4\times\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot OF$，所以 $AF=4OF$，即 $OF=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$AO=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以四面体 $ABCD$ 的外接球体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi OA^3=\sqrt{6}\pi$,故 C 正确；

建系如图：$A\left(0,0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right),C\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$，设$P(x,y,0)$，则$\overrightarrow{AP}=\left(x,y,-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right),\overrightarrow{AC}=\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

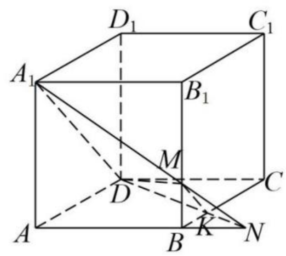
因为$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^\circ$，所以$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{24}{9}=\sqrt{x^2+y^2+\dfrac{8}{3}}\times\sqrt{\dfrac{12}{9}+\dfrac{24}{7}}\times\dfrac{1}{2}$，

即$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{8}{3}=\sqrt{x^2+y^2+\dfrac{8}{3}}$，平方化简可得：$x^2-\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{32\sqrt{3}}{9}y-\dfrac{40}{9}-0$，可知点$P$的轨迹为双曲线,故D错误.

13.【详解】符合题意的情况有两种：2名医生、3名护士和3名医生、2名护士.

选取2名医生、3名护士的方法有：$C_5^2C_4^3=40$种；选取3名医生、2名护士的方法有：$C_5^3C_4^2=60$种；

综上所述：满足题意的选取方法共有$40+60=100$种．故答案为：100.



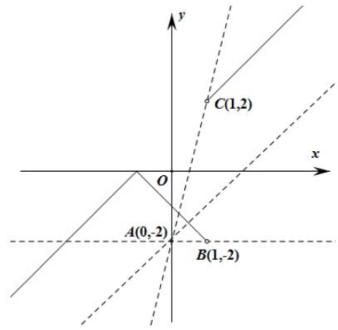
14.【详解】由题意，延长线段A_1M与AB的延长线交于点N，连接DN交BC于K，连接MK，故平面A_1DM延展开后即为平面A_1DKM，将该正方体分成的两部分一部分是三棱台$BMK-ADA_1$，另一部分是剩余的部分.

由于$MB//A_1A$，故$\dfrac{NB}{NA}=\dfrac{MB}{AA_1}=\dfrac{MB}{BB_1}=\dfrac{1}{3}$，不妨设正方体棱长为3，

$V_1=V_{BMK-ADA_1}=\dfrac{1}{3}(S_{\triangle BKM}+S_{\triangle ADA_1}+\sqrt{S_{\triangle BKM}\times S_{\triangle ADA_1}})\times AB$

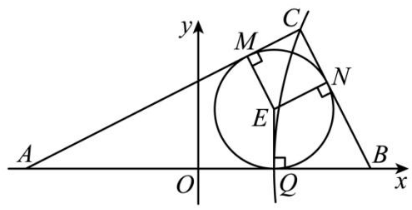
$=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times3\times3+\dfrac{1}{2}\times1\times1+\sqrt{\dfrac{9}{4}})\times3=\dfrac{13}{2}$，

$V_2=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{BMK-ADA_1}=3^3-\dfrac{13}{2}=\dfrac{41}{2}$，即$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{13}{41}$.故答案为：$\dfrac{13}{41}$.



15.【分析】$y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=\dfrac{|x+1||x-1|}{x-1}=\begin{cases}x+1,x>1,\\-|x+1|,x<1,\end{cases}$ 函数$y=kx-2$过定点（0，-2），

由数形结合：$k_{AB}<k<1$或$1<k<k_{AC}$，$\therefore 0<k<1$或$1<k<4$.



16.【详解】由$\left|\overline{BA}\right|=14$，可设$A(-7,0)$、$B(7,0)$，由$\left|\overline{CA}\right|-\left|\overline{CB}\right|=6$，

得点C的轨迹是以A,B为焦点，实轴长为6的双曲线的右支（不含右顶点）.

因为CD是$\triangle ABC$的角平分线，且$\overline{BE}-\overline{BA}=\overline{AE}=\lambda\left(\dfrac{\overline{AD}}{\left|\overline{AD}\right|}+\dfrac{\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|}\right)(\lambda>0)$,

故AE也为$\triangle ABC$的角平分线，$\therefore E$为$\triangle ABC$的内心.如图，设$E(x_0,y_0)$，$EM\perp AC,EQ\perp AB,EN\perp BC$，

则由双曲线与内切圆的性质可得，$|AC|-|BC|=|AM|-|BN|=|AQ|-|BQ|=6$，

又$|AQ|+|BQ|=14$，所以，$|BQ|=7-3=4$，$\therefore\overline{BE}$在$\vec{a}$上的投影长为4，则$\overline{BE}$在$\vec{a}$上的投影向量为$\dfrac{4}{14}\vec{a}=\dfrac{2}{7}\vec{a}$.

17.【详解】(1) 解：由正弦定理可得$\dfrac{\sqrt{3}c}{b\cos A}=\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\sin B\cos A}$，

又由 $\tan A+\tan B=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$，

因为 $\frac{\sqrt{3}c}{b\cos A}=\tan A+\tan B$，可得 $\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin B\cos A}=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$，因为 $C\in(0,\pi)$，可得 $\sin C>0$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$，

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

（2）解：因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，由（1）知 $B=\frac{\pi}{3}$ 且 $A+B+C=\pi$，可得 $A+C=\frac{2}{3}\pi$，

因为 $0<C<\frac{\pi}{2},0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，由三角形面积公式得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}a$

又由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 且 $c=4$，所以 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{4\sin A}{\sin C}=\frac{4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\tan C}+2$，

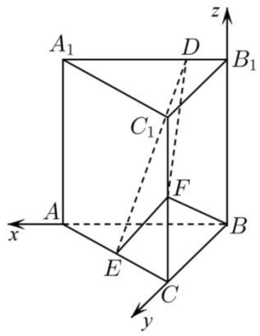
因为 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $2<\frac{2\sqrt{3}}{\tan C}+2<8$，

所以 $2\sqrt{3}<S_{\triangle ABC}<8\sqrt{3}$，即 $\triangle ABC$ 面积的取值范围为 $\left(2\sqrt{3},8\sqrt{3}\right)$.

18．(1)因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，$\therefore BB_1\perp$ 底面 ABC，$\therefore BB_1\perp AB$

$\because A_1B_1//AB$，$BF\perp A_1B_1$，$\therefore BF\perp AB$，又 $BB_1\cap BF=B$，$\therefore AB\perp$ 平面 BCC_1B_1．所以 BA,BC,BB_1 两两垂直.

以 B 为坐标原点，分别以 BA,BC,BB_1 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图.



$\therefore B(0,0,0),A(2,0,0),C(0,2,0),B_1(0,0,2),A_1(2,0,2),C_1(0,2,2)$，$E(1,1,0),F(0,2,1)$.

由题设 $D(a,0,2)$（$0\le a\le 2$）．因为 $\overrightarrow{BF}=(0,2,1),\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，

所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0\times(1-a)+2\times1+1\times(-2)=0$，所以 $BF\perp DE$.

(2)设平面 DFE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{EF}=(-1,1,1),\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，

所以 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+y+z=0\\ (1-a)x+y-2z=0\end{cases}$．令 $z=2-a$，则 $\vec{m}=(3,1+a,2-a)$

因为平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\overrightarrow{BA}=(2,0,0)$，设平面 BCC_1B_1 与平面 DEF 的二面角的平面角为 θ，

则 $|\cos\theta|=\frac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA}\right|}{|\vec{m}|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\frac{6}{2\times\sqrt{2a^2-2a+14}}=\frac{3}{\sqrt{2a^2-2a+14}}$．当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$2a^2-2a+4$ 取最小值为 $\frac{27}{2}$，

此时 $\cos\theta$ 取最大值为 $\frac{3}{\sqrt{\frac{27}{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$．所以 $(\sin\theta)_{\min}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，此时 $B_1D=\frac{1}{2}$.

19．(1)解：函数 $f(x)=x^3-3x^2+a$ 的定义域为 R，$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，

令 $f'(x)=0$，可得 $x=0$ 或 2，列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

故函数$f(x)$的极大值为$f(0)=a$，极小值为$f(2)=a-4$.

(2)解：对于$\forall x_1\in[1,3]$，$\forall x_2\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，都有$f(x_1)\geq g(x_2)$，则$f(x_1)_{\min}\geq g(x_2)_{\max}$.

由（1）可知，函数$f(x)$在$[1,2)$上单调递减，在$(2,3]$上单调递增，

故当$x\in[1,3]$时，$f(x)_{\min}=f(2)=a-4$，因为$g(x)=x\ln x$，且$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，则$g'(x)=1+\ln x\geq 0$且$g'(x)$不恒为零，

故函数$g(x)$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上单调递增，故$g(x)_{\max}=g(e)=e$，由题意可得$a-4\geq e$，故$a\geq e+4$.

20.【详解】(1）设等差数列的公差为d，由题意可得$\begin{cases}a_2=a_1+d=11\\S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=40\end{cases}$，即$\begin{cases}a_1+d=11\\2a_1+9d=8\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=13\\d=-2\end{cases}$，

所以$a_n=13-2(n-1)=15-2n$，

（2）因为$S_n=\frac{n(13+15-2n)}{2}=14n-n^2$，令$a_n=15-2n>0$，解得$n<\frac{15}{2}$，且$n\in\mathbf{N}^*$，

当$n\leq 7$时，则$a_n>0$，可得$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=14n-n^2$；

当$n\geq 8$时，则$a_n<0$，可得$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_8+\cdots+a_n)$

$=S_7-(S_n-S_7)=2S_7-S_n=2(14\times 7-7^2)-(14n-n^2)=n^2-14n+98$；

综上所述：$T_n=\begin{cases}14n-n^2,n\leq 7\\n^2-14n+98,n\geq 8\end{cases}$.

21.【详解】(1）由椭圆C的焦距为2，故$c=1$，则$b^2=a^2-1$，

又由椭圆C经过点$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$，代入$C$得$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，得$a^2=4$，$b^2=3$，所以椭圆$C$的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）根据题意，直线l的斜率显然不为零，令$\frac{1}{k}=m$

由椭圆右焦点$F(1,0)$，故可设直线l的方程为$x=my+1$，

与$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$联立得，$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，则$\Delta=36m^2-4(-9)(3m^2+4)=144(m^2+1)>0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，

设存在点 T，设 T 点坐标为$(t,0)$，由$|AF|\cdot|BT|=|BF|\cdot|AT|$，得$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|AT|}{|BT|}$，

又因为$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{S_{\triangle TFA}}{S_{\triangle TFB}}=\frac{\frac{1}{2}|FT|\cdot|AT|\sin\angle ATF}{\frac{1}{2}|FT|\cdot|BT|\sin\angle BTF}=\frac{|AT|\sin\angle ATF}{|BT|\sin\angle BTF}$，所以$\sin\angle ATF=\sin\angle BTF$，$\angle ATF=\angle BTF$，

所以直线 TA 和 TB 关于 x 轴对称，其倾斜角互补，即有$k_{AT}+k_{BT}=0$，

则：$k_{AT}+k_{BT}=\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=0$，所以$y_1(x_2-t)+y_2(x_1-t)=0$，

所以$y_1(my_2+1-t)+y_2(my_1+1-t)=0$，$2my_1y_2+(1-t)(y_1+y_2)=0$，

即$2m\times\frac{-9}{3m^2+4}+(1-t)\times\frac{-6m}{3m^2+4}=0$，即$\frac{3m}{3m^2+4}+(1-t)\frac{m}{3m^2+4}=0$，

解得$t=4$，符合题意，即存在点$T(4,0)$满足题意.

22.【详解】(1) 由题知，X 的取值可能为 1，2，3 所以$P(X=1)=\left(\frac{1}{C_2^1}\right)^2=\frac{1}{4}$；

$P(X=2)=\left[1-\left(\frac{1}{C_2^1}\right)^2\right]\left(\frac{1}{C_3^1}\right)^2=\frac{1}{12}$；$P(X=3)=\left[1-\left(\frac{1}{C_2^1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{1}{C_3^1}\right)^2\right]=\frac{2}{3}$；

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$

所以数学期望为$E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{12}+3\times\frac{2}{3}=\frac{3+2+24}{12}=\frac{29}{12}$.

(2) 令$x_i=\frac{1}{t_i}$，则$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$;，由题知：$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=315$，$\bar{y}=90$，

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{315-5\times0.46\times90}{1.46-5\times0.212}=\frac{108}{0.4}=270$，

所以$\hat{a}=90-270\times0.46=-34.2$，$\hat{y}=270x-34.2$，故所求的回归方程为：$\hat{y}=\frac{270}{t}-34.2$，

所以，估计$t=6$时，$y\approx11$；估计$t=7$时，$y\approx4$；估计$t\geq8$时，$y<0$；

预测成功的总人数为$450+11+4=465$.

(3) 由题知，在前n轮就成功的概率为

$P=\frac{1}{2^2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1}{3^2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\frac{1}{4^2}+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{(n+1)^2}$

又因为在前n轮没有成功的概率为$1-P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{4}{3}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{n+1}{n}\right)\times\left(\frac{n}{n+1}\right)\times\left(\frac{n+2}{n+1}\right)=\frac{n+2}{2n+2}=\frac{\frac{1}{2}(2n+2)+1}{2n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+2}>\frac{1}{2}$，

故$\frac{1}{2^2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1}{3^2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\frac{1}{4^2}+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。