2024届云南三校高考备考实用性联考卷（一）
数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	B	B	D	A	B

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	AB	BCD	BC	BD

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\dfrac{9}{64}$	8	$y=-e^2x$	2

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）由题意设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

由题意得 $\begin{cases}q>1,\\a_1q=4,\\2(1+a_1q)=a_1+a_1q^2,\end{cases}$ ……（2 分）

解得 $q=2$ 或 $q=\dfrac{1}{2}$(舍去)，……（3 分）

故 $a_n=2^n$． ……（4 分）

（2）由（1）得 $a_n=a_2q^{n-2}=2^n$，则 $b_n=\log_2a_n=n$，所以数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，

故 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$， ……（6 分）

所以 $T_n=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}$

$=\dfrac{2}{1\times2}+\dfrac{2}{2\times3}+\cdots+\dfrac{2}{n(n+1)}$

$=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$. ……………………………………………………………………………（8 分）

由于 $n\geqslant 1$，得 $0<\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$，

所以 $1\leqslant T_n<2$，

故 T_n 的取值范围是 $[1,\ 2)$. ……………………………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $c\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin C$，可得 $c\sin\left(\dfrac{\pi-A}{2}\right)=c\cos\dfrac{A}{2}=a\sin C$，

所以由正弦定理可得 $\sin C\cos\dfrac{A}{2}=\sin A\sin C$，……………………………………（1 分）

又 C 为三角形内角，$\sin C\neq 0$，

所以 $\cos\dfrac{A}{2}=\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，…………………………………………………（2 分）

因为 $A\in(0,\ \pi)$，$\dfrac{A}{2}\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\dfrac{A}{2}>0$，

所以 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，…………………………………………………………………（3 分）

可得 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………（4 分）

（2）由（1）知 $A=\dfrac{\pi}{3}$，又 $a=\sqrt{3}$，

由正弦定理得 $\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$，……………………………………………（5 分）

则 $b=2\sin B$，$c=2\sin C$，

$\therefore a+b+c$

$=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin C$

$=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+B\right)$

$=\sqrt{3}+2\sin B+2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B\right)$ ……………………………………………（7 分）

$=\sqrt{3}+2\sin B+\sqrt{3}\cos B+\sin B$

$=\sqrt{3}+3\sin B+\sqrt{3}\cos B$

$=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$，………………………………………………………（9 分）

$\because B\in\left(0,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore B+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore \sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right]$，$2\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\in(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}]$，

$\therefore a+b+c\in(2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}]$．……………………………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：在$\triangle POC$中，$\angle CPO=\dfrac{\pi}{3}$，$CP=2$，$OP=1$，

所以$CO^2=CP^2+OP^2-2CP\cdot OP\cdot\cos\angle CPO=4+1-2\times2\times1\times\dfrac{1}{2}=3$．

所以，$CO=\sqrt{3}$．……………………………………………………………………………………（1 分）

故$\triangle POC$为$\mathrm{Rt}\triangle$，$\angle POC=90°$，

可得$CO\perp OP$．……………………………………………………………………………………（2 分）

又$\angle AOC=\dfrac{\pi}{2}$，即$CO\perp OA$．

$OP\cap OA=O$，OP，$OA\subset$平面AOP，

所以，$CO\perp$平面AOP．……………………………………………………………………（4 分）

（2）解：由（1）知$OC\perp$平面AOP，

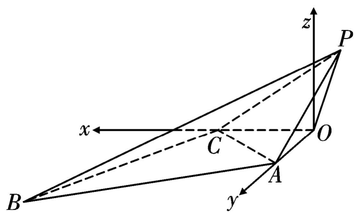
又$\because OC\subset$平面$OABC$，

所以平面$AOP\perp$平面$OABC$，

又$\because OP=OA=1$，$PA=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle POA=\dfrac{2\pi}{3}$，……………………………………………………………………………（5 分）

以OC为x轴，OA为y轴，过O且垂直于平面$OABC$的直线为z轴建立如图所示的空间直角坐标系．



在$\mathrm{Rt}\triangle AOC$中，$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{1+3}=2$，

在$\triangle ABC$中，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，

$\therefore \sin\angle ACB=\dfrac{AB\sin\angle ABC}{AC}=\dfrac{4\times\frac{1}{2}}{2}=1$，

$\therefore$ $\triangle ABC$ 为 Rt$\triangle$，可得 $B(2\sqrt{3},\ 3,\ 0)$．……………………………………（7 分）

又 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(0,\ 1,\ 0)$，$C(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$P\left(0,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$．

设平面 POC 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\overrightarrow{OP}=\left(0,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0,\\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\\ x_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}$，

$\therefore \overrightarrow{n_1}=(0,\ \sqrt{3},\ 1)$，……………………………………………………………（9 分）

设平面 PAB 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,\ -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{3},\ 2,\ 0)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_2}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{3}x_2+2y_2=0,\\ -\dfrac{3}{2}y_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$，则 $y_2=-\sqrt{3}$，$z_2=-3$，

$\therefore \overrightarrow{n_2}=(1,\ -\sqrt{3},\ -3)$，…………………………………………………………（10 分）

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\rangle=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}=-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，……………………………………………（11 分）

$\therefore$ 平面 POC 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$．…………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意得列联表如下：

	一等品	非一等品	合计
甲	75	25	100
乙	48	32	80
合计	123	57	180

……………………………………………………………………………………（2 分）

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{180\times(75\times32-48\times25)^2}{123\times57\times100\times80}\approx4.621,$$

$\because 4.621>3.841=x_{0.05}$，……………………………………………………………………（4 分）

依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，可以认为零件是否为一等品与生产线有关联.

……………………………………………………………………………………………（5 分）

（2）由已知任取一个甲生产线零件为一等品的概率为 $\frac{23+28+24}{100}=\frac{3}{4}$，

任取一个乙生产线零件为一等品的概率为 $\frac{15+17+16}{80}=\frac{3}{5}$，

ξ 的所有可能取值为 0，1，2，

$P(\xi=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$，

$P(\xi=1)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$，

$P(\xi=2)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$，

$\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$

……………………………………………………………………………………………（8 分）

$E(\xi)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}=\frac{27}{20}$. ……………………………………………（9 分）

（3）由已知零件为三等品的频率为 $\frac{4+2+2+1}{180}=\frac{1}{20}$，

设余下的 40 个零件中三等品个数为 X，则 $X\sim B\left(40,\ \frac{1}{20}\right)$，

$\therefore E(X)=40\times\frac{1}{20}=2$，……………………………………………………………（10 分）

设检验费用与赔偿费用之和为 Y，

若不对余下的所有零件进行检验，则 $Y=20\times5+120X$，

所以 $E(Y)=100+120\times E(X)=100+240=340$，……………………………………（11 分）

若对余下的所有零件进行检测，则检验费用为$60\times5=300$元，

$\because 340>300$，

$\therefore$应对剩下零件进行检验. ……………………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）不妨设T的坐标为$(x_0,\ y_0)$，则$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，

又$M_1(-a,\ 0)$，$M_2(a,\ 0)$，

则$k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0}{x_0+a}\times\dfrac{y_0}{x_0-a}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\dfrac{3-\dfrac{3x_0^2}{a^2}}{x_0^2-a^2}=-\dfrac{3}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$. ………………………（2 分）

故可得$\dfrac{3}{a^2}=\dfrac{3}{4}$；

可得$a^2=4$，

故可得椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………（4 分）

（2）①若直线AB斜率存在，不妨设其方程为$y=kx+b$，$b\neq0$，

联立椭圆方程$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$可得：

$(3+4k^2)x^2+8kbx+4b^2-12=0$，

则$\Delta=64k^2b^2-4(3+4k^2)(4b^2-12)>0$，

整理得$4k^2-b^2+3>0$，

设点A，B的坐标为$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，

故可得$x_1+x_2=-\dfrac{8kb}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4b^2-12}{3+4k^2}$，………………………………………（5 分）

$y_1y_2=(kx_1+b)(kx_2+b)=k^2x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2=\dfrac{3b^2-12k^2}{3+4k^2}$.

因为$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$，故可得$x_1x_2+y_1y_2=0$，

即可得$\dfrac{4b^2-12}{3+4k^2}+\dfrac{3b^2-12k^2}{3+4k^2}=0$，

则$7b^2=12k^2+12$，结合$4k^2-b^2+3>0$，可得$16k^2+9>0$，

故$k\in\mathbf{R}$. …………………………………………………………………………………（7 分）

又$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{4\sqrt{12k^2-3b^2+9}}{3+4k^2}$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\bullet\dfrac{4\sqrt{12k^2-3b^2+9}}{3+4k^2}$，

原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$．

故可得 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d=\sqrt{1+k^2}\bullet\dfrac{2\sqrt{12k^2-3b^2+9}}{3+4k^2}\bullet\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$．

将 $7b^2=12k^2+12$ 代入上式可得：$S_{\triangle OAB}=\dfrac{6}{7}\times\sqrt{\dfrac{(16k^2+9)(4k^2+4)}{(3+4k^2)^2}}$，

令 $3+4k^2=t(t\geqslant 3)$，

则 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{6}{7}\sqrt{\dfrac{(4t-3)(t+1)}{t^2}}=\dfrac{6}{7}\sqrt{-3\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{49}{12}}\geqslant\dfrac{6}{7}\sqrt{-3\times\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{49}{12}}=\dfrac{12}{7}$，

……………………………………………………………………………………（10 分）

当且仅当 $t=3$，$k=0$，$b^2=\dfrac{12}{7}$ 时取得最小值．

②当直线的斜率不存在时，则 $OA=OB$，又 $\overline{OA}\bullet\overline{OB}=0$，所以$\triangle OAB$为等腰直角三角形．

设直线为 $x=t$，$t\in(-2，0)\cup(0，2)$，

联立椭圆方程 $\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t^2}{3}=1$ 可得 $t^2=\dfrac{12}{7}$，

故 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times|t||2t|=t^2=\dfrac{12}{7}$，

此时$\triangle OAB$的面积为定值 $\dfrac{12}{7}$．

综上所述，$\triangle OAB$的面积存在最小值，最小值为 $\dfrac{12}{7}$． ……………………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

（1）解：由题知，当 $a=1$时，$f(x)=(x-1)^2e^x-\dfrac{1}{3}x^3+x$．

则 $f'(x)=(x^2-1)(e^x-1)$，……………………………………………………………（1 分）

由 $f'(x)>0$ 得 $\begin{cases}x^2-1>0,\\ e^x-1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-1<0,\\ e^x-1<0,\end{cases}$

解得 $x>1$ 或 $-1<x<0$，…………（2 分）

故函数的单调递增区间为 $x>1$ 或 $-1<x<0$，…………（3 分）

又函数的定义域为 **R**，故单调递减区间为 $x<-1$ 或 $0<x<1$．…………（4 分）

（2）证明：由（1）知，$g(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+(x-1)^2e^x$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$\therefore g'(x)=\dfrac{1}{x}-x+(x^2-1)e^x=(x+1)(x-1)\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)$，…………（5 分）

设 $h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}(x>0)$，

$\therefore h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，$\therefore h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，…………（6 分）

$\because h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$h(1)=e-1>0$，

$\therefore$ 存在唯一 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $h(x_0)=0$，

即 $e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，$-x_0=\ln x_0$，…………（7 分）

当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)>0$；

当 $x_0<x<1$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)<0$；…………（8 分）

当 $x>1$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，…………（9 分）

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上是增函数，在区间 $(x_0,1)$ 上是减函数，在区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore$ 当 $x=x_0$ 时，$g(x)$ 取极大值为 $g(x_0)=\ln x_0-\dfrac{1}{2}x_0^2+(x_0-1)^2e^{x_0}=-\dfrac{1}{2}x_0^2+\dfrac{1}{x_0}-2$，

…………（10 分）

设 $F(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{x}-2\left(\dfrac{1}{2}<x<1\right)$，其知 $F(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上是减函数.

$\therefore g(x_0)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点，…………（11 分）

$\because g(1)=-\dfrac{1}{2}<0$，$g(2)=e^2-2+\ln 2>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内有且只有一个零点，

综上所述，$g(x)$ 有且只有一个零点.…………（12 分）