高三文科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. $\dfrac{5+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$（　　）

A．$2+3\mathrm{i}$　　B．$3+3\mathrm{i}$　　C．$2-3\mathrm{i}$　　D．$3-3\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x<3\}$，$B=\{x\,|\,x^2-x\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{1\}$　　C．$[0,1]$　　D．$(0,1]$

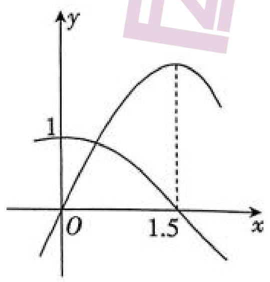
3. 已知 $a=4^{0.3}$，$b=8^{\frac{1}{3}}$，$c=\lg 0.3$，这三个数的大小关系为（　　）

A．$b<a<c$　　B．$a<b<c$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

4. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，则该双曲线的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　B．$y=\pm\sqrt{3}x$　　C．$y=\pm\sqrt{5}x$　　D．$y=\pm 2x$

5. 已知函数 $f(x)=A\sin\omega x\,(A>0,\omega>0)$ 与 $g(x)=\dfrac{A}{2}\cos\omega x$ 的部分图象如图所示，则（　　）

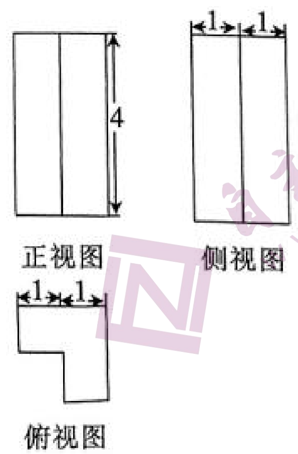


A．$A=1,\omega=\dfrac{3}{\pi}$　　B．$A=2,\omega=\dfrac{3}{\pi}$　　C．$A=1,\omega=\dfrac{\pi}{3}$　　D．$A=2,\omega=\dfrac{\pi}{3}$

6. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1-a_2=2$，$a_2-a_3=6$，则 $S_4=$（　　）

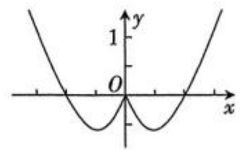
A．-60　　B．-40　　C．20　　D．40

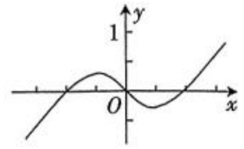
7. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）

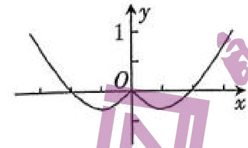


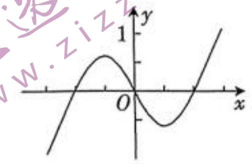
A．32　　B．34　　C．36　　D．38

8. 函数 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$ 的图象大致为（　　）

A．

B．

C．

D．

9. 已知 $\tan\alpha=2$，且 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=m\tan 2\alpha$，则 $m=$（　　）

A．$-\dfrac{9}{4}$　　B．$-\dfrac{4}{9}$　　C．$\dfrac{4}{9}$　　D．$\dfrac{9}{4}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_{n+1}=a_n+n+1$，则 $a_{10}=$（　　）

A．36　　B．45　　C．55　　D．66

11. 过原点作两条互相垂直的直线分别交抛物线 $y^2=2px$ 于 A，B 两点（A，B 均不与坐标原点重合），若抛物线的焦点 F 到直线 AB 距离的最大值为 3，则 $p=$（　　）

A．$\dfrac{3}{2}$　　B．2　　C．3　　D．6

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，关于 x 的方程 $f(x)-\dfrac{1}{f(x)}=m$ 有三个不等的实根，则 m 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　B．$\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　C．$\left(-\infty,\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}\right)$　　D．$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e},+\infty\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 120°，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______.

14. 设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+y\le 6\\ -1\le x\le 1\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为______.

15. 若直线 $y=12x+m$ 与曲线 $y=x^3-2$ 相切，则 $m=$______.

16. 在三棱锥 $D-ABC$ 中，$CD\perp$ 底面 ABC，$AC\perp BC$，$AB=BD=5$，$BC=4$，则此三棱锥的外接球的表面积为______.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17.（本小题满分 12 分）

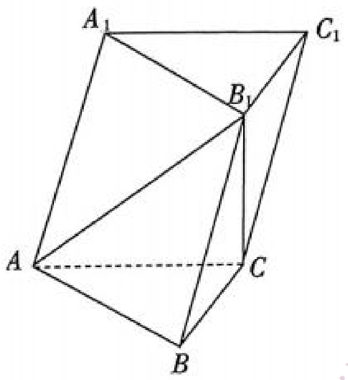
$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B-\sin A\sin C=0$．

（1）求 B；

（2）若 $\frac{a}{c}=\frac{3}{2}$，求 $\tan C$.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC=BC=1$， $AB=\sqrt{2}$， $B_1C=1$， $B_1C\perp$ 平面 ABC.

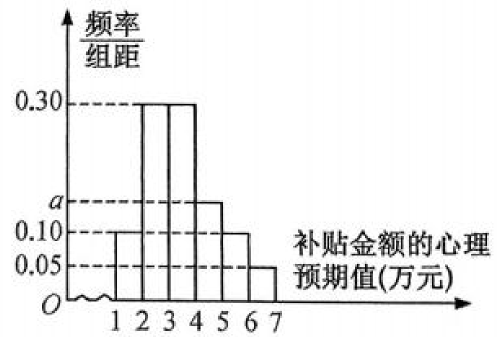


（1）证明： $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1；

（2）求点 C 到平面 ABB_1A_1 的距离.

19.（本小题满分 12 分）

某新能源汽车制造公司，为鼓励消费者购买其生产的新能源汽车，约定从今年元月开始，凡购买一辆该品牌汽车，在行驶三年后，公司将给予适当金额的购车补贴．某调研机构对已购买该品牌汽车的消费者，就购车补贴金额的心理预期值进行了抽样调查，得其样本频率分布直方图如图所示.



（1）求实数 a 的值；

（2）估计已购买该品牌汽车的消费群体对购车补贴金额的心理预期值的平均数（同一组数据用该区间的中点值作代表）和中位数；（精确到 0.01）

（3）现在要从购车补贴金额的心理预期值在[3，5）间用分层抽样的方法抽取 6 人，再从这 6 人中随机抽取 2 人进行调查，求抽到 2 人中购车补贴金额的心理预期值都在[3，4）间的概率.

20.（本小题满分 12 分）

已知点 $F\left(\sqrt{3},0\right)$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的一个焦点，点 $M\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 l 与椭圆 C 交于不同的 A，B 两点，且 $k_{OA}+k_{OB}=-\frac{1}{2}$（$O$ 为坐标原点），求直线 l 斜率的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\left(a+1\right)x+a\ln x$.

（1）当 $a>1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）当 $a<1$ 且 $a\neq 0$ 时，若 $f\left(x\right)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 两题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：**坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，曲线 M 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+3\cos\alpha\\y=1+3\sin\alpha\end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）．在以原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标中，直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=m$.

（1）求曲线 M 的普通方程，并指出曲线 M 是什么曲线；

（2）若直线 l 与曲线 M 相交于 A，B 两点，$\left|AB\right|=4$，求 m 的值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：**不等式选讲**

设函数 $f\left(x\right)=\left|x+1\right|+\left|x-a\right|$.

（1）当 $a=1$ 时，求关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\geq 3$ 的解集；

（2）若 $f\left(x\right)\leq 4$ 在 $\left[0,2\right]$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1．A　$\dfrac{5+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(5+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{4+6\mathrm{i}}{2}=2+3\mathrm{i}$．

2．A　因为 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x\mid 0\le x\le 1\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$．

3．C　$\because b=2=4^{0.5}>4^{0.3}=a>0$，$c=\lg 0.3<\lg 1=0$，$\therefore c<a<b$．

4．D　由题可知，$\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2-a^2}{a^2}}=2$，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 2x$．

5．D　$\because \dfrac{A}{2}=1$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=1.5\times 4$，$\therefore A=2$，$\omega=\dfrac{\pi}{3}$．

6．B　$q=\dfrac{a_2-a_3}{a_1-a_2}=3$，$a_1=-1$，则 $S_4=-40$．

7．D　根据题中的三视图可知，该几何体是由一个长、宽均为 2，高为 4 的长方体截去一个长、宽均为 1，高为 4 的长方体后剩余的部分，因此该几何体的表面积为 $2\times2\times2+2\times4\times4-1\times1\times2=38$．

8．B　$\because f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数，排除 A，C．$\because f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{10}>-\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 排除 D，故选 B．

9．A　$\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$，$\tan 2\alpha=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}$，则 $m=-\dfrac{9}{4}$．

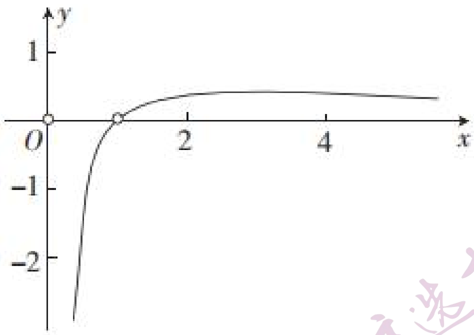
10．C　数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，对任意 $n\in\mathrm{N}^*$ 都有 $a_{n+1}=a_n+n+1$，则 $a_{n+1}-a_n=n+1$，由递推公式可得 $a_n-a_{n-1}=n$，$a_{n-1}-a_{n-2}=n-1$，$a_{n-2}-a_{n-3}=n-2$，…，$a_4-a_3=4$，$a_3-a_2=3$，$a_2-a_1=2$，等式左右两边分别相加可得 $a_n-a_1=2+3+4+\cdots+n-2+n-1+n$，所以

$a_n=1+2+3+4+\cdots+n-2+n-1+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，则 $a_{10}=\dfrac{10\times 11}{2}=55$，故选 C．

11．B　设直线 AB 的方程为 $x=my+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，把直线方程代入抛物线方程，得 $y^2-2pmy-2pt=0$，所以 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-2pt$．因为 $OA\perp OB$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$，即 $\dfrac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+y_1y_2=0$，解得 $y_1y_2=-4p^2$，所以 $t=2p$，所以直线恒过点（$2p$，0），则抛物线的焦点 F 到直线 AB 距离的最大值为 $2p-\dfrac{p}{2}=3$，即 $p=2$．

12．C　$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，可知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，令 $t=f(x)$，$g(t)=t^2-mt-1=0$ 有两个不等的实根，则 $t_1t_2=-1<0$，又关于 x 的方程 $f(x)-\dfrac{1}{f(x)}=m$ 有三个不等的实根，所以 $t_1<0<t_2<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则

$g=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-\dfrac{m}{\mathrm{e}}-1>0$，解得 $m<\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}$.



13．-2　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$.

14．7　作出约束条件表示的可行域，由图可知，当直线 $z=2x+y$ 过点（-1，9）时，z 取得最大值 7.

15．-18 或 14　设切点为 (x_0,y_0)，$\because y'=3x^2$，$\therefore 3{x_0}^2=12$，$x_0=\pm2$．当 $x_0=2$ 时，$y_0=6$，则 $6=24+m$，$m=-18$；当 $x_0=-2$ 时，$y_0=-10$，则 $-10=-24+m$，$m=14$.

16．34π　由题可知 $AC=CD=\sqrt{3^2-4^2}=3$，故三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的半径

$R=\dfrac{\sqrt{3^2+4^2+3^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$，则其表面积为 $4\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{34}}{2}\right)^2=34\pi$.

17．解：（1）$\because \sin^2A+\sin^2C-\sin^2B-\sin A\sin C=0$，

$\therefore a^2+c^2-b^2-ac=0$，即 $a^2+c^2-b^2=ac$.

由余弦定理可得，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，

又 $\because 0<B<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）（方法一）：$\because B=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}-C$，

则 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C}{\sin C}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan C}+\frac{1}{2}$.

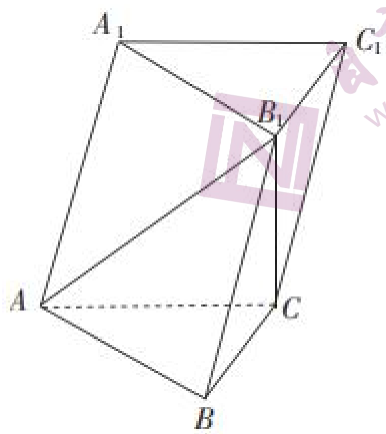
$\because \frac{a}{c}=\frac{3}{2}$，$\therefore \tan C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（方法二）$\because \frac{a}{c}=\frac{3}{2}$，$\therefore$可设$a=3k$，$c=2k$，由余弦定理可得，$b=\sqrt{7}k$，

再由余弦定理，得$\cos C=\frac{2}{\sqrt{7}}$，

故$\tan C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18．



（1）证明：因为$B_1C\perp$平面ABC，所以$B_1C\perp AC$.

因为$AC=BC=1$，$AB=\sqrt{2}$，所以$AC\perp BC$，

又$BC\cap B_1C$，所以$AC\perp$平面BCC_1B_1.

（2）解：设点C到平面ABB_1A_1的距离为h.

因为$B_1C\perp$平面ABC，所以$B_1C\perp AC$，$B_1C\perp BC$.

则$AB_1=\sqrt{2}$，$BB_1=\sqrt{2}$，又$AB=\sqrt{2}$，所以$\triangle ABB_1$是等边三角形，

故$S_{\triangle ABB_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$V_{C-ABB_1A_1}=2V_{C-ABB_1}=2V_{B_1-ABC}=2\times\frac{1}{3}\times B_1C\times S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}$，

$V_{C-ABB_1A_1}=\frac{1}{3}S_{ABB_1A_1}\cdot h=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{3}h$.

所以$h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19．解：（1）由题意知，$1\times\left(0.10+0.30+0.30+a+0.10+0.05\right)=1$，解得$a=0.15$.

（2）平均数的估计值为

$\overline{x}=1.5\times 0.1+2.5\times 0.3+3.5\times 0.3+4.5\times 0.15+5.5\times 0.1+6.5\times 0.05=3.5$万元

因为$0.1+0.3<0.5<0.1+0.3+0.3$，则中位数在区间（3，4）内.
设中位数为$3+x$，则$0.1+0.3+0.3x=0.5$，
得$x=\frac{1}{3}\approx 0.33$，所以中位数的估计值为3.33万元.

（3）从购车补贴金额的心理预期值在[3，5）间用分层抽样的方法抽取6人，则购车补贴金额的心理预期值在[3，4）间的有4人，记为a，b，c，d，购车补贴金额的心理预期值在[4，5）间的有2人，记为A，B，则基本事件有（a，b），（a，c），（a，d），（a，A），（a，B），（b，c），（b，d），（b，A），（b，B），（c，d），（c，A），（c，B）（d，A），（d，B），（A，B），共15种情况.
其中购车补贴金额的心理预期值都在[3，4）间有（a，b），（a，c），（a，d），（b，c），（b，d），（c，d），共6种情况，所以抽到2人中购车补贴金额的心理预期值都在[3，4）间的概率$p=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

20．解：（1）由题可知，椭圆的另一个焦点为（$-\sqrt{3}$，0），

所以点M到两焦点的距离之和为$\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}=4$，

所以$a=2$.

又因为$c=\sqrt{3}$，所以$b=1$，则椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）当直线l的斜率不存在时，结合椭圆的对称性可知，$k_{OA}+k_{OB}=0$，不符合题意.

故设直线l的方程为$y=kx+m$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，可得$\left(4k^2+1\right)x^2+8kmx+4\left(m^2-1\right)=0$.

所以$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1} \\ x_1x_2=\dfrac{4\left(m^2-1\right)}{4k^2+1} \\ \Delta=16\left(4k^2-m^2+1\right)>0 \end{cases}$，

而$k_{OA}+k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{\left(kx_1+m\right)x_2+\left(kx_2+m\right)x_1}{x_1x_2}=2k+\dfrac{m\left(x_1+x_2\right)}{x_1x_2}=2k+\dfrac{-8km^2}{4\left(m^2-1\right)}=\dfrac{-2k}{m^2-1}$，

由$k_{OA}+k_{OB}=-\dfrac{1}{2}$，可得$m^2=4k+1$.

所以$k\geq-\dfrac{1}{4}$，又因为$16\left(4k^2-m^2+1\right)>0$，所以$4k^2-4k>0$，

综上，$k\in\left[-\dfrac{1}{4},0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，

21．解：（1）$f'\left(x\right)=x-\left(a+1\right)+\dfrac{a}{x}=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-a\right)}{x}\left(x>0\right)$.

当$a>1$时，由$f'\left(x\right)>0$，得$0<x<1$或$x>a$；

由$f'\left(x\right)<0$，得$1<x<a$.

故$f\left(x\right)$在（0，1），（a，$+\infty$）上单调递增，在（1，a）上单调递减.

（2）①当$a<0$时，$f\left(x\right)$在（1，$+\infty$）上单调递增，在（0，1）上单调递减，

则$f\left(x\right)_{\min}=f\left(1\right)=-a-\dfrac{1}{2}$，

因为$\exists m\in\left(0,1\right)$，$f\left(m\right)>0$，且$f\left(2\right)=a\left(-2+\ln 2\right)>0$，

所以$f\left(1\right)=-a-\dfrac{1}{2}<0$，即$-\dfrac{1}{2}<a<0$.

②当$0<a<1$时，$f\left(x\right)$在（0，a），（1，$+\infty$）上单调递增，在（a，1）上单调递减，

$f\left(x\right)$在$x=a$时取得极大值，且$f\left(a\right)=\dfrac{1}{2}a^2-\left(a+1\right)a+a\ln a=-\dfrac{1}{2}a^2+a\left(-1+\ln a\right)$，

因为$0<a<1$，所以$-1+\ln a<0$，则$f\left(a\right)<0$，

所以$f\left(x\right)$在（0，$+\infty$）只有一个零点.

综上，a的取值范围为（$-\dfrac{1}{2}$，0）.

22．解：（1）由$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha\\y=1+3\sin\alpha\end{cases}$，（$\alpha$为参数），消去参数得$(x-1)^2+(y-1)^2=9$，

故曲线M的普通方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=9$，

曲线M的轨迹是以（1，1）为圆心，3为半径的圆．

（2）由$\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=m$，展开得$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-m=0$，

∴l的直角坐标方程为$x-y-m=0$．

圆心到直线l的距离为$\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$，

则$\left(\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}\right)^2=3^2-2^2$，解得$m=\pm\sqrt{10}$．

23．解：（1）因为$f(x)=|x+1|+|x-1|=\begin{cases}-2x,x<-1\\2,-1\le x<1\\2x,x\ge1\end{cases}$，

所以$f(x)\ge3$的解集为$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

（2）因为$x\in[0,2]$，所以$x+1+|x-a|\le4$，

即$|x-a|\le3-x$，则$-3\le-a\le3-2x$，

所以$1\le a\le3$