郑州外国语学校2022-2023学年上期高三第四次调研考试试卷

数　学（理科）参考答案与试题解析

一．选择题（共12小题）

1．设全集 $U=R$，集合 $A=\{x|x^2-x-2\le 0\}$，$B=\{x|lgx>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|-1\le x\le 2\}$　B．$\{x|1<x\le 2\}$　C．$\{x|1<x<2\}$　D．$\{x|x\ge -1\}$

【解答】解：解 $x^2-x-2\le 0$ 得 $-1\le x\le 2$，$A=\{x|-1\le x\le 2\}$，

由 $lgx>0$ 得 $x>1$，故 $B=\{x|x>1\}$，

所以 $A\cap B=\{x|1<x\le 2\}$．

故选：B．

2．已知复数 z 满足 $zi=3i+4$，其中 i 为虚数单位，则$\overline{z}$在复平面内对应点在（　　）

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

【解答】解：$z=\frac{3i+4}{i}=3-4i$，

则$\overline{z}=3+4i$．

故$\overline{z}$在复平面内对应点（3，4）在第一象限．

故选：A．

3．下列各命题的否定为真命题的是（　　）

A．$\forall x\in R$，$x^2-x+\frac{1}{4}\ge 0$　B．$\exists x\in \mathbf{R}$，$2^x>x^2$

C．$\exists x\in R^+$，$(\frac{1}{3})^x>log_2x$　D．$\forall x\in [0，\frac{\pi}{2}]$，$sinx<x$

【解答】解：对于 A，$\forall x\in R$，$x^2-x+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2\ge 0$为真命题，故其否定为假命题，错误；

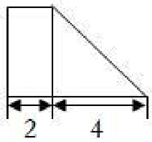
对于 B，因为 $x=5$ 时，$2^5=32>5^2=25$，$\exists x\in \mathbf{R}$，$2^x>x^2$ 为真命题，故其否定为假命题，错误；

对于 C，当 $x\in$（0，1）时，$(\frac{1}{3})^x>0$，$log_2x<0$，$\exists x\in R^+$，$(\frac{1}{3})^x>log_2x$为真命题，故其否定为假命题，错误；

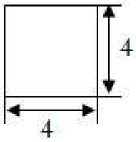
对于 D，当 $x=0$ 时，$\sin 0=0$，故$\forall x\in [0，\frac{\pi}{2}]$，$sinx<x$为假命题，故其否定为真命题，正确；

故选：D．

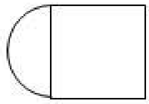
4．某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是（　　）



正视图



侧视图

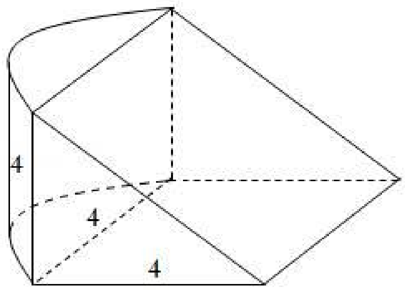


俯视图

A．$16\pi+32$　　B．$8\pi+32$　　C．$8\pi+\frac{32}{3}$　　D．$16\pi+\frac{32}{3}$

【解答】解：根据几何体的三视图转换为直观图为：该几何体由一个半圆柱和一个三棱柱组成的几何体；

如图所示：



故$V=\frac{1}{2}\times\pi\cdot2^2\times4+\frac{1}{2}\times4\times4\times4=8\pi+32$．

故选：B．

5．已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，点 P 是 C 上一点，且$|PF|=5$，以 PF 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为 1，则 $p=$（　　）

A．2　　B．2 或 4　　C．4　　D．4 或 6

【解答】解：设以 PF 为直径的圆与 x 轴交点为 A，

则$|AF|=1$，$|PF|=5$，

连接 PA，则$\angle PAF=90°$，

所以$|PA|=\sqrt{|PF|^2-|AF|^2}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$，

所以 $y_P=2\sqrt{6}$，

把 $y=2\sqrt{6}$，代入 $y^2=2px$，

得 $x=\frac{12}{p}$，

所以 $x_P=\frac{12}{p}$,

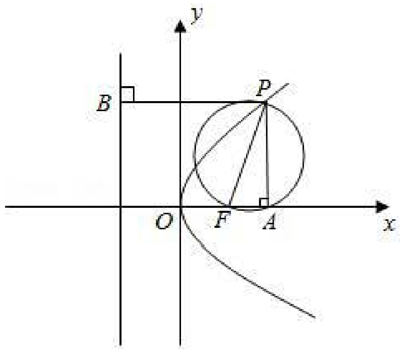
所以$\frac{12}{p}-\left(-\frac{p}{2}\right)=|PF|$,

即$\frac{12}{p}+\frac{p}{2}=5$,

所以 $p^2-10p+24=0$

解得 $p=4$ 或 6,

故选:D.



6. 设正项等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n, 若 $2S_3=3a_2+8a_1$, $S_8=2S_7+2$, 则 $a_2=$(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【解答】解:设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,

$\because 2S_3=3a_2+8a_1$,

$\therefore 2(a_1+a_2+a_3)=3a_2+8a_1$, 即 $6a_1+a_2-2a_3=0$,

$\therefore 6a_1+a_1q-2a_1q^2=0$,

$\because a_1>0$,

$\therefore 6+q-2q^2=0$, 解得 $q=2$ 或 $q=-\frac{3}{2}$(舍去),

$\therefore q=2$,

$\because S_8=2S_7+2$,

$\therefore S_7+a_8=2S_7+2$,

$\therefore a_8=S_7+2$,

$\therefore a_1q^7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}+2$,

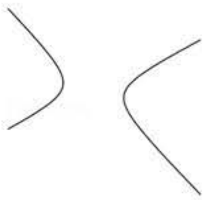
$\because q=2$,

$\therefore 128a_1=127a_1+2$, 解得 $a_1=2$,

$\therefore a_2=a_1q=4$.

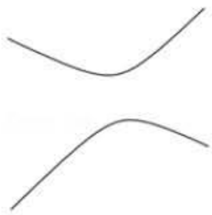
故选:A.

7．将曲线（$x+y$）（$x-2y+1$）$+1=0$ 的图像画在坐标轴上，再把坐标轴擦去（x 轴水平向右，y 轴竖直向上），得到的图像最有可能为（　　）

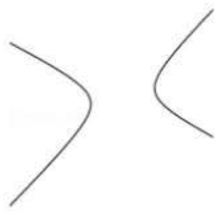


A．

B．



C．



D．

【解答】解：令 $x=0$，得 $2y^2-y-1=0$ 有一正一负根，故图象与 y 轴正负半轴各有一个交点，

再令 $y=0$，得 $x^2+x+1=0$，显然无实根，故图象与 x 轴没交点，故排除 A，D；

由原式得$x+y=\frac{-1}{x-2y+1}$，当 $x\to+\infty$，$y\to-\infty$时，$x+y=\frac{-1}{x-2y+1}\to0^-$，即此时图象在第四象限无限趋近于直线 $x+y=0$，且纵坐标的绝对值大一点，B 选项在第四象限的图象更符合，C 不符合，故 B 最有可能．

故选：B．

8．若函数 f（x）$=x^2+mx+n$ 在区间（-1，1）上有两个零点，则 n^2-m^2+2n+1 的取值范围是（　　）

A．（0，1）　　B．（1，2）　　C．（0，4）　　D．（1，4）

【解答】解：设 f（x）的两个零点为 x_1，x_2，其中$x_1,x_2\in(-1,1)$，

则 f（x）$=$（$x-x_1$）（$x-x_2$），

所以 $n^2-m^2+2n+1=$（$n+1$）$^2-m^2=$（$n+1+m$）（$n+1-m$）

$=f(1)\cdot f(-1)=(1-x_1^2)(1-x_2^2)$

$\in(0,1)$．

故选：A．

9．已知函数 f（x）$=ae^x+4x$，对任意的实数 x_1，$x_2\in$（$-\infty$，$+\infty$），且 $x_1\neq x_2$，不等式$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>x_1+x_2$恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[\frac{2}{e},+\infty)$　　B．$[\frac{2}{e^3}+\infty)$　　C．$(\frac{2}{e},+\infty)$　　D．$(\frac{2}{e^3}+\infty)$

【解答】解：不妨设 $x_1>x_2$，由$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>x_1+x_2$，得$f(x_1)-f(x_2)>x_1^2-x_2^2$，

即$f(x_1)-x_1^2>f(x_2)-x_2^2$，

令 $g(x)=f(x)-x^2$，所以对任意的实数 x_1，$x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_1>x_2$时，都有 $g(x_1)>g(x_2)$，

即 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)=ae^x-2x+4\geq0$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，

即$a\geq\frac{2x-4}{e^x}$．在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，

令$h(x)=\frac{2x-4}{e^x}$．则$h'(x)=\frac{6-2x}{e^x}$，

令 $h'(x)>0$，解得 $x<3$，令 $h'(x)<0$，解得 $x>3$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，

所以$h(x)_{max}=h(3)=\frac{2}{e^3}$，所以$a\geq\frac{2}{e^3}$，

即实数 a 的取值范围是$[\frac{2}{e^3}, +\infty)$．

故选：B．

10．张衡是中国东汉时期伟大的天文学家、数学家，他曾在数学著作《算罔论》中得出结论：圆周率的平方除以十六约等于八分之五．已知在菱形 $ABCD$ 中，$AB=BD=2\sqrt{3}$，将△ABD 沿 BD 进行翻折，使得 $AC=2\sqrt{6}$．按张衡的结论，三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积约为（　　）

A．72　　　　B．$24\sqrt{10}$　　　　C．$28\sqrt{10}$　　　　D．$32\sqrt{10}$

【解答】解：$\because AB=BD=2\sqrt{3}$且 $ABCD$ 为菱形，可知△ABD 和△CBD 为全等的等边三角形，

记 BD 中点为 E，则 $AE=CE=3$，

又翻折后$AC=2\sqrt{6}$，由余弦定理可知：$cos\angle AEC=\frac{3^2+3^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times3\times3}=-\frac{1}{3}$，

过△ABD 和△CBD 的外接圆圆心 O_1，O_2，分别作两条垂线垂直于△ABD 和△CBD，相交于外接球 O，

因为$O_1E=\frac{1}{3}AE=1$，且$cos\angle AEO=\sqrt{\frac{1+cos\angle AEC}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

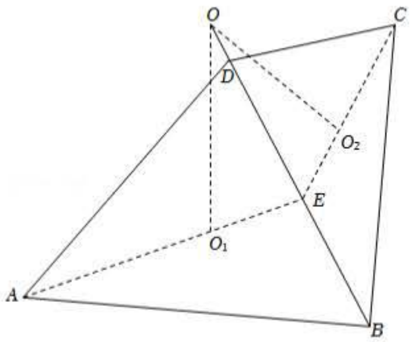
由此，在 Rt△O_1EO 中，可求得$OE=\sqrt{3}$，$OO_1=\sqrt{2}$．$O_1A=\frac{2}{3}AE=2$，

由已知$\pi^2=16\times\frac{5}{8}=10\Rightarrow\pi=\sqrt{10}$，

所以外接球半径$R^2=OA^2=O_1A^2+OO_1^2=6$，

所以外接球表面积为$4\pi R^2=24\sqrt{10}$，

故选：B．



11．已知函数$f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且对任意$x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geq0$恒成立，则实数a的取值集合为（　　）

A．$\{a|0<a<1\}$　B．$\{a|1<a<2\}$　C．$\{a|-1<a<1\}$　D．$\{1\}$

【解答】解：函数$f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，对任意$x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geq0$恒成立，

即为$ax-a-\ln x\geq0$恒成立，即有$0\leq(ax-a-\ln x)_{min}$．

设$g(x)=ax-a-\ln x$，$x>0$，$g'(x)=a-\frac{1}{x}$，

当$a\leq0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$内递减，$g(x)$无最小值；

当$a>0$时，$x>\frac{1}{a}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$递增；当$0<x<\frac{1}{a}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$递减，

可得$g(x)$在$x=\frac{1}{a}$处取得极小值，且为最小值$1-a+\ln a$．

所以$1-a+\ln a\geq0$，

又设$h(a)=1-a+\ln a$，$a>0$，$h'(a)=-1+\frac{1}{a}$，

当$a>1$时，$h'(a)<0$，$h(a)$递减；当$0<a<1$时，$h'(a)>0$，$h(a)$递增，

则$h(a)$在$a=1$处取得极大值，且为最大值0，

所以$1-a+\ln a\leq0$，即$1-a+\ln a=0$，

解得$a=1$．

故选：D．

12．已知函数$f(x)=\sin(\cos x)+\cos(\sin x)$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$是奇函数　　B．$f(x)$的最大值为2

C．$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x-\pi)=f(x)$　　D．$\forall x\in[0,\pi]$，$f(x+\pi)>0$

【解答】解：对于A，$f(-x)=\sin(\cos(-x))+\cos(\sin(-x))=\sin(\cos x)$

$+\cos(-\sin x)=\sin(\cos x)+\cos(\sin x)=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 为偶函数，选项 A 错误；

对于 B，由于 $-1\le\cos x\le 1$，则 $\sin(\cos x)$ 的最大值为 $\sin 1$，而 $\cos(\sin x)$ 的最大值为 1，

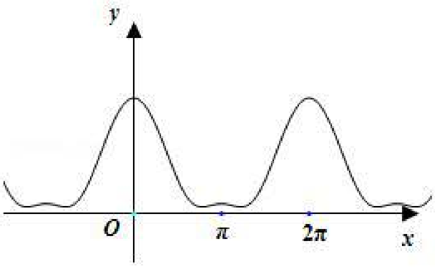
$\therefore f(x)$ 的最大值为 $\sin 1+1<2$，选项 B 错误；

对于 C，不妨取 $x=0$，则 $f(-\pi)=\sin(\cos(-\pi))+\cos(\sin(-\pi))=\sin(-1)+\cos 0=1-\sin 1$，

而 $f(0)=\sin(\cos 0)+\cos(\sin 0)=\sin 1+1$，

$\therefore f(0-\pi)\ne f(0)$，选项 C 错误；

$\therefore$ 选项 D 正确，作出函数 $f(x)$ 图象验证如下，



由图象可知，选项 D 正确.

选项 D 的代数推导：$f(x+\pi)=\cos(\sin x)-\sin(\cos x)$，

若 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，则 $\cos(\sin x)>0$，$\sin(\cos x)<0$，则 $f(x+\pi)>0$，

若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin x+\cos x\le\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$，即 $0<\sin x<\frac{\pi}{2}-\cos x<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\cos(\sin x)>\cos(\frac{\pi}{2}-\cos x)=\sin(\cos x)$，

即 $f(x+\pi)>0$.

故选：D.

二．填空题（共 4 小题）

13. $\int_{-2}^{2}(e^{|x|}+\sqrt{4-x^2})dx=$__$2e^2-2+2\pi$__.

【解答】解：$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\pi$，

$\int_{-2}^{2}e^{|x|}dx=2\int_{0}^{2}e^{x}dx=2e^{x}|_{0}^{2}=2e^2-2$，

故 $\int_{-2}^{2}(e^{|x|}+\sqrt{4-x^2})dx=2e^2-2+2\pi$，

故答案为：$2e^2-2+2\pi$.

14. 已知甲袋内有大小相同的 2 个红球和 2 个白球，乙袋内有大小相同的 1 个红球

和 2 个白球．现从甲、乙两个袋内各任取 2 个球，则恰好有 2 个红球的概率为 $\underline{\frac{1}{2}}$.

【解答】解：设 X 为红球的个数.

$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_3^2}+\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}\cdot\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}=\frac{1}{2}$,

答案为：$\frac{1}{2}$.

15．已知函数 $f(x)=(\sin\omega x)^2+\frac{1}{2}\sin2\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0,\ \omega\in R)$，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$）内没有零点，则 ω 的取值范围是 $\underline{(0,\ \frac{1}{16}]\cup[\frac{1}{8},\ \frac{5}{16}]}$.

【解答】解：函数 $f(x)=(\sin\omega x)^2+\frac{1}{2}\sin2\omega x-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(1-\cos2\omega x)+\frac{1}{2}\sin2\omega x-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin2\omega x-\frac{1}{2}\cos2\omega x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\omega x-\frac{\pi}{4})$,

由 $f(x)=0$，可得 $\sin(2\omega x-\frac{\pi}{4})=0$，解得 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{2\omega}\notin(\pi,2\pi)$,

因为 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，

所以 $\frac{T}{2}\geq\pi$，即 $\frac{\pi}{2\omega}\geq\pi$，解得 $\omega\leq\frac{1}{2}$;

又因为 $\omega>0$,

令 $\pi<\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{2\omega}<2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$;

解得 $\frac{k}{4}+\frac{1}{16}<\omega<\frac{k}{2}+\frac{1}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$;

当 $k=0$ 时，$\omega\in(\frac{1}{16},\ \frac{1}{8})$,

当 $k=1$ 时，$\omega\in(\frac{5}{16},\ \frac{5}{8})$;

所以有解时 ω 的取值范围是 $(\frac{1}{16},\ \frac{1}{8})\cup(\frac{5}{16},\ \frac{1}{2}]$,

由 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，所以 ω 的取值范围是 $(0,\ \frac{1}{16}]\cup[\frac{1}{8},\ \frac{5}{16}]$.

故答案为：$(0,\ \frac{1}{16}]\cup[\frac{1}{8},\ \frac{5}{16}]$.

16．过双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左焦点 F_1 的动直线 l 与 Γ 的左支交于 A，B 两点，设 Γ 的右焦点为 F_2. 若存在直线 l，使得 $AF_2\perp BF_2$，则 Γ 的离心率的取值范围是 $\underline{(\sqrt{5},\ 1+\sqrt{2}]}$.

【解答】法 1：设 $|AF_1|=m$，$|BF_1|=n$，则 $|AF_2|=m+2a$，$|BF_2|=n+2a$,

且$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2a}{b^2}$.

若$AF_2\perp BF_2$，则$|AB|^2=|AF_2|^2+|BF_2|^2$，

代入化简即得$\left(\frac{4a^2}{b^2}-1\right)mn+4n^2=0$，

又$\frac{2a}{b^2}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geq\frac{2}{\sqrt{mn}}$，所以$mn\geq\frac{b^4}{a^2}$，

所以$\frac{4a^2}{b^2}-1<0$，且$\left(\frac{4a^2}{b^2}-1\right)\frac{b^4}{a^2}+4a^2\geq 0$.

解上述不等式得$\frac{b^2}{a^2}\in(4,2\sqrt{2}+2]$，所以$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\in(\sqrt{5},1+\sqrt{2}]$.

法2：依题意可知直线 l 的斜率不为0，设直线 l 的方程为 $x=my-c$，

将直线 l 的方程为 $x=my-c$ 代入椭圆方程可得（$b^2m^2-a^2$）$y^2-2b^2cmy+b^4=0$，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），则$y_1+y_2=\frac{2b^2cm}{b^2m^2-a^2}$，$y_1y_2=\frac{b^4}{b^2m^2-a^2}$，

由 $AF_2\perp BF_2$，可得$\overrightarrow{AF_2}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，故（$x_1-c$）（$x_2-c$）$+y_1y_2=0$，整理可得（$my_1-2c$）（$my_2-2c$）$+y_1y_2=0$，

整理得$(m^2+1)y_1y_2-2cm(y_1+y_2)+4c^2=0$，将$y_1+y_2=\frac{2b^2cm}{b^2m^2-a^2}$，$y_1y_2=\frac{b^4}{b^2m^2-a^2}$代入上式可得（$m^2+1$）$b^4-4m^2c^2b^2+4c^2$（$b^2m^2-a^2$）$=0$，

∴（m^2+1）$b^4=4a^2c^2$，∴$m^2+1=\frac{4a^2c^2}{b^4}\geq 1$，化简整理得 $4a^2c^2\geq$（c^2-a^2）^{2}，

进而可得 $c^4+a^4-6a^2c^2\leq 0$，不等式两边除以 a^4 得 $e^4-6e^2+1\leq 0$，解不等式得 $3-2\sqrt{2}\leq e^2\leq 3+2\sqrt{2}$，

又 $e>1$，∴$1<e^2\leq 3+2\sqrt{2}$，解得 $1<e\leq 1+\sqrt{2}$，

又 A，B 在左支且 l 过 F_1，∴$y_1y_2<0$，∴$\frac{b^4}{b^2m^2-a^2}<0$，∴$m^2<\frac{a^2}{b^2}$，

∴$m^2+1=\frac{4a^2c^2}{b^4}<\frac{a^2}{b^2}+1$，∴$4a^2c^2<a^2b^2+b^4=b^2$（$a^2+b^2$）$=b^2c^2$，

解得 $4a^2<b^2=c^2-a^2$，∴$5a^2<c^2$，∴$e^2>5$，∴$e>\sqrt{5}$，

综上：$\sqrt{5}<e\leq 1+\sqrt{2}$，即 $e\in$（$\sqrt{5}$，$1+\sqrt{2}$].

三．解答题（共6小题，第17题10分，其余各题12分）

17．在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $c\sin B\cos B+b\sin B\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}b$.

（1）求 A；

（2）若角 A 为钝角，△ABC 的面积为 S，求$\frac{S}{a^2}$的最大值.

【解答】解：（1）在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且

$c\sin B\cos B+b\sin B\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，

则$\sin C\sin B\cos B+\sin B\sin B\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B$，

因为 $\sin B\neq 0$，所以$\sin C\cos B+\sin B\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\sin(B+C)=\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………………………………4 分

因为 $0<A<\pi$，

所以$A=\frac{\pi}{3}$或$A=\frac{2\pi}{3}$； ……………………………………………5 分

（2）由 A 为钝角及（1）结论，则$A=\frac{2\pi}{3}$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2+bc$，

又$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，

所以$\frac{S}{a^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{bc}{b^2+c^2+bc}\leq\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{bc}{2bc+bc}=\frac{\sqrt{3}}{12}$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，

故$\frac{S}{a^2}$的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{12}$. ……………………………………………10 分

18．已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且 $a_1=1$，$a_{n+1}=-\frac{2}{3}S_n+1$，$b_n=2\log_{\frac{1}{3}}a_n+3$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若 $c_n=a_n+\frac{1}{T_n}$，设数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 R_n，证明：$R_n<3$.

【解答】解：（1）因为 $a_{n+1}=-\frac{2}{3}S_n+1$，

由 $a_1=1$，所以 $a_2=-\frac{2}{3}a_1+1=\frac{1}{3}$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=-\frac{2}{3}S_{n-1}+1$，

两式相减得，$a_{n+1}-a_n=-\frac{2}{3}a_n$，即 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$， ……………………………………3 分

易知，$a_2=\frac{1}{3}a_1$，符合上式， ……………………………………………4 分

所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，$\frac{1}{3}$为公比的等比数列，

所以 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$； ……………………………………………5 分

$b_n=2\log_{\frac{1}{3}}a_n+3=2\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3=2n+1$； ……………………………6 分

（2）证明：由（1）$b_n=2n+1$，所以 $T_n=\frac{n(3+2n+1)}{2}=n(n+2)$，

若 $c_n=a_n+\frac{1}{T_n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{n(n+2)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$， ……………………8 分

所以 $R_n=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})+\ldots\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+$ $(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})]=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times(\frac{1}{3})^n+\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$

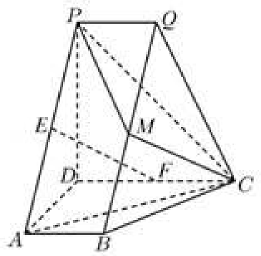
$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times(\frac{1}{3})^n+\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\times(\frac{1}{3})^n-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}<\frac{9}{4}<3$，得证.

……………………………………………12 分

19. 如图，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp CD$，$AB\parallel CD$，$PQ\parallel CD$，$AD=CD=DP=2PQ=2AB=2$，点 E，F，M 分别为 AP，CD，BQ 的中点.

（1）求证：$EF\parallel$ 平面 CPM；

（2）若 N 为线段 CQ 上的点，且直线 DN 与平面 QPM 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$，求线段 QN 的长.



【解答】解：（1）证明：连接 EM，因为 $AB\parallel CD$，$PQ\parallel CD$，$CD=2PQ=2AB=2$，

所以四边形 $ABQP$ 为平行四边形，

又点 E，F，M 分别为 AP，CD，BQ 的中点，

则 $EM\parallel AB$，$EM=AB$，$CF=\frac{1}{2}CD$，即 $EM\parallel CF$ 且 $EM=CF$，

所以四边形 $EMCF$ 为平行四边形，则 $EF\parallel CM$，

又 $EF\not\subset$ 平面 CPM，$CM\subset$ 平面 CPM，

所以 $EF\parallel$ 平面 CPM；　……………………………………………4 分

（2）建立如图所示的空间直角坐标系，则

$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,1,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$Q(0,1,2)$，$M(1,1,1$

$\overrightarrow{PM}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PQ}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{CM}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$，

设平面 QPM 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PM}=x+y-z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PQ}=y=0\end{cases}$，

则可取 $\vec{m}=(1,0,1)$；　……………………………………………6 分

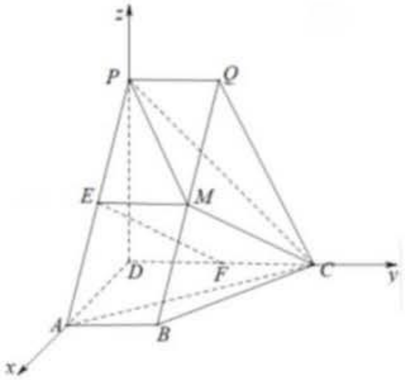
设 $\overrightarrow{QN}=\lambda\overrightarrow{QC}(0\le\lambda\le1)$，则 $\overrightarrow{QN}=\lambda\overrightarrow{QC}=(0,\lambda,-2\lambda)$，

所以$N(0,\ \lambda+1,\ 2-2\lambda)$，$\overrightarrow{DN}=(0,\ \lambda+1,\ 2-2\lambda)$，

由题意直线 DN 与平面 QPM 所成的角为$\frac{\pi}{6}$，

则$\sin\frac{\pi}{6}=|\cos<\overrightarrow{DN},\ \vec{m}>|=\frac{|\overrightarrow{DN}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{DN}||\vec{m}|}=\frac{|2-2\lambda|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，解得$\lambda=\frac{1}{3}$或 $\lambda=3$（舍），……………………………………………10 分

所以$|\overrightarrow{QN}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{QC}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$，即线段 QN 的长为$\frac{\sqrt{5}}{3}$．……………………………12 分



20．目前，教师职业越来越受青睐，考取教师资格证成为不少人的就业规划之一．当前，中小学教师资格考试分笔试和面试两部分．已知某市 2022 年共有 10000 名考生参加了中小学教师资格考试的笔试，现从中随机抽取 100 人的笔试成绩（满分 100 分）作为样本，整理得到如下频数分布表：

笔试成绩 X	[40，50)	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
人数	5	10	25	30	20	10

由频数分布表可认为该市全体考生的笔试成绩 X 近似服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，其中，μ 近似为 100 名样本考生笔试成绩的平均值（同一组的数据用该组区间的中点值代替）．

（1）若 $\sigma\approx12$，据此估计该市全体考生中笔试成绩高于 85 的人数（结果四舍五入精确到个位）；

（2）按照分层随机抽样方法，从笔试成绩为[80，90）和[90，100]的考生中随机抽取 6 人，再从这 6 人中随机抽取 2 人，记成绩不低于 90 分的人数为随机变量 ξ，求 ξ 的分布列和均值．

参考数据：若 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx0.9973$．

【解答】解：（1）由题意知，$\mu=\frac{1}{100}(45\times5+55\times10+65\times25+75\times30+85\times20+95\times10)$

=73， ……………………………………………2 分

所以 P（73 - 12≤X≤73+12）=P（61≤X≤85）≈0.6827，

所以 P（X>85）$=\frac{1}{2}$（1 - 0.6827）=0.15865，……………………………………4 分

所以估计该市全体考生中笔试成绩高于 85 的人数为 10000×0.15865=1586.5≈1587 名． ……………………………………………6 分

（2）按照比例分配的分层随机抽样方法，抽取的 6 人中，笔试成绩为[80，90）的考生有 4 名，笔试成绩为[90，100]的考生有 2 名，

随机变量 ξ 的可能取值为 0，1，2，

P（ξ=0）$=\frac{C_4^2C_2^0}{C_6^2}=\frac{2}{5}$，$P$（ξ=1）$=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$，$P$（ξ=2）$=\frac{C_4^0C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$，

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

……………………………………………10 分

均值 E（ξ）$=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$． ……………………………………………12 分

21．已知离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的椭圆 C 的中心在原点 O，对称轴为坐标轴，F_1，F_2 为左右焦点，M 为椭圆上的点，且$|\overrightarrow{MF_1}|+|\overrightarrow{MF_2}|=2\sqrt{2}$．直线 l 过椭圆外一点 P（m，0）（m<0），与椭圆交于 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）两点，满足 $y_2>y_1>0$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）对于任意点 P，是否总存在唯一的直线 l，使得$\overrightarrow{F_1A}//\overrightarrow{F_2B}$成立，若存在，求出点 P（m，0）对应的直线 l 的斜率；否则说明理由．

【解答】解：（1）由题可设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由椭圆定理可得$|\overrightarrow{MF_1}|+|\overrightarrow{MF_2}|=2a=2\sqrt{2}$，

则$a=\sqrt{2}$，$c=1$，$b=1$，

所以椭圆的方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$． ……………………………………………4 分

（2）设直线 l 方程为 $y=k$（x - m）（斜率必存在），

则$\overrightarrow{F_1A}=(x_1+1，y_1)$，$\overrightarrow{F_2B}=(x_2-1，y_2)$，

∵$\overrightarrow{F_1A}\parallel\overrightarrow{F_2B}$，

∴（x_1+1）$\cdot y_2$=（x_2 - 1）$\cdot y_1$，

∴（x_1+1）$\cdot k$（x_2-m）=（x_2-1）$\cdot k$（x_1-m），

化简得 $x_2+x_1+m(x_2-x_1)-2m=0$①，　……………………………………………6 分

联立 $y=k(x-m)$ 与椭圆方程可得，$(1+2k^2)x^2-4mk^2x+2k^2m^2-2=0$，$\Delta=8k^2(2-m^2)+8>0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{4mk^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2m^2-2}{1+2k^2}$，　……………………………………………8 分

代入①得，$\frac{4mk^2}{1+2k^2}+m(x_2-x_1)-2m=0$，

$\therefore x_2-x_1=\frac{2}{1+2k^2}$②，

$\therefore (x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{16k^2-8k^2m^2+8}{(1+2k^2)^2}$，

代入②得：$4k^2-2k^2m^2+1=0$，故$k^2=\frac{1}{2m^2-4}$，　…………………………………10 分

而点 A、B 在 x 轴上方，所以对于任意一个$m<-\sqrt{2}$，存在唯一的$k=\sqrt{\frac{1}{2m^2-4}}$使得$\overrightarrow{F_1A}\parallel\overrightarrow{F_2B}$成立，

故满足题意的直线 l 有且只有一条．　…………………………………………12 分

22．已知函数 $f(x)=ax^2-bx+\ln x$ 在点（1，$f(1)$）处的切线方程为 $2x-2y-3=0$．

（1）求实数 a，b 的值；

（2）设函数$g(x)=f(x)-mx(m\geq\frac{3}{2})$的两个极值点为 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$，若 $g(x_1)-g(x_2)\geq\lambda$ 恒成立，求满足条件的 λ 的最大值．

【解答】解：（1）由 $f(x)=ax^2-bx+\ln x$，得$f'(x)=2ax-b+\frac{1}{x}$，

因为（1，$f(1)$）在切线方程 $2x-2y-3=0$ 上，

所以 $2-2y-3=0$，解得$y=-\frac{1}{2}$，

所以$f(1)=-\frac{1}{2}$，所以$\begin{cases}a-b+\ln 1=-\frac{1}{2}\\2a-b+1=1\end{cases}$，

解得$a=\frac{1}{2}$，$b=1$．　…………………………………………4 分

（2）由（1）知，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln x$，

则$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln x-mx(m\geq\frac{3}{2})$

则$g'(x)=\frac{1}{x}+x-(m+1)=\frac{x^2-(m+1)x+1}{x}$（$x>0$），

由 $g'(x)=0$，得 $x^2-(m+1)x+1=0$，

因为 x_1，x_2（$x_1<x_2$）是函数 $g(x)$ 的两个极值点，

所以方程 $x^2-(m+1)x+1=0$ 有两个不相等的正实根 x_1，x_2，

所以 $x_1+x_2=m+1$，$x_1x_2=1$，所以$x_2=\frac{1}{x_1}$. ……………………………………………6 分

因为$m\geq\frac{3}{2}$，所以$x_1+\frac{1}{x_1}=m+1\geq\frac{5}{2}$，解得$0<x_1\leq\frac{1}{2}$或 $x_1\geq 2$，

因为$0<x_1<x_2=\frac{1}{x_1}$，所以$0<x_1\leq\frac{1}{2}$，

所以$g(x_1)-g(x_2)=lnx_1+\frac{1}{2}x_1^2-(m+1)x_1-lnx_2-\frac{1}{2}x_2^2+(m+1)x_2$

$=ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-(m+1)(x_1-x_2)=2lnx_1-\frac{1}{2}(x_1^2-\frac{1}{x_1^2})$，……………………8 分

令$F(x)=2lnx-\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{x^2})(0<x\leq\frac{1}{2})$，

则$F'(x)=\frac{2}{x}-x-\frac{1}{x^3}=\frac{-(x^2-1)^2}{x^3}<0$，所以 $F(x)$ 在$(0,\frac{1}{2}]$上单调递减，

所以当$x=\frac{1}{2}$时，$F(x)$ 取得最小值，

即$F(x)_{\min}=2ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-4)=\frac{15}{8}-2ln2$，

所以$\lambda\leq\frac{15}{8}-2ln2$，即实数 λ 的最大值为$\frac{15}{8}-2ln2$. ……………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。