绝密★启封并使用完毕前

试题类型：新课标III

2016 年普通高等学校招生全国统一考试
理科数学

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 3 页，第 II 卷 3 至 5 页。

2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置。

3. 全部答案在答题卡上完成，答在本试题上无效。

4. 考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

第 I 卷

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合

题目要求的。

（1）设集合 S= $S=\{x|(x-2)(x-3)\ge 0\},T=\{x|x>0\}$，则 $S\cap T$=

(A) [2，3]　　(B)（-∞，2]∪[3,+∞）

(C) [3,+∞）　　(D)（0，2]∪[3,+∞）

【答案】D

【解析】

试题分析：由 $(x-2)(x-3)\ge 0$ 解得 $x\ge 3$ 或 $x\le 2$，所以 $S=\{x|x\le 2或x\ge 3\}$，所以 $S\cap T=\{x|0<x\le 2或x\ge 3\}$，故选 D.

考点：1、不等式的解法；2、集合的交集运算.

（2）若 $z=1+2i$，则 $\dfrac{4i}{z\bar{z}-1}=$

(A) 1　　(B) -1　　(C) i　　(D) -i

【答案】C

【解析】

试题分析：$\dfrac{4i}{z\bar{z}-1}=\dfrac{4i}{(1+2i)(1-2i)-1}=i$，故选 C.

考点：1、复数的运算；2、共轭复数.

（3）已知向量 $\overrightarrow{BA}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，则∠ABC=

(A) 30^0　　(B) 45^0　　(C) 60^0　　(D) 120^0

【答案】A

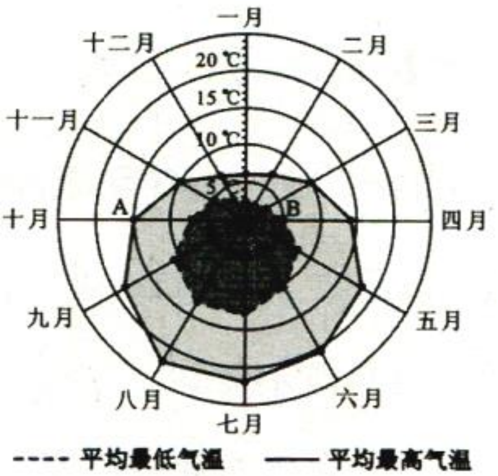
【解析】

试题分析：由题意，得 $\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle ABC=30°$，故选 A.

考点：向量夹角公式.

（4）某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图。

图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15^0C，B 点表示四月的平均最低气温约为 5^0C。下面叙述不正确的是



(A) 各月的平均最低气温都在 0^0C 以上　　(B) 七月的平均温差比一月的平均温差大

(C) 三月和十一月的平均最高气温基本相同　　(D) 平均气温高于 20^0C 的月份有 5 个

【答案】D

【解析】

试题分析：由图可知 $0°C$ 均在虚线框内，所以各月的平均最低气温都在 0℃以上，A 正确；由图可在七月的平均温差大于 $7.5°C$，而一月的平均温差小于 $7.5°C$，所以七月的平均温差比一月的平均温差大，B 正确；由图可知三月和十一月的平均最高气温都大约在 $5°C$，基本相同，C 正确；由图可知平均最高气温高于 20℃的月份有 3 个或 2 个，所以不正确．故选 D．

考点：1、平均数；2、统计图

（5）若 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ ，则 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$

(A) $\dfrac{64}{25}$　　(B) $\dfrac{48}{25}$　　(C) 1　　(D) $\dfrac{16}{25}$

【答案】A

【解析】

试题分析：由 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$，得 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ 或 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5},\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，所以

$\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=\dfrac{16}{25}+4\times\dfrac{12}{25}=\dfrac{64}{25}$，故选 A.

考点：1、同角三角函数间的基本关系；2、倍角公式.

（6）已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则

（A）$b<a<c$　　（B）$a<b<c$　　（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

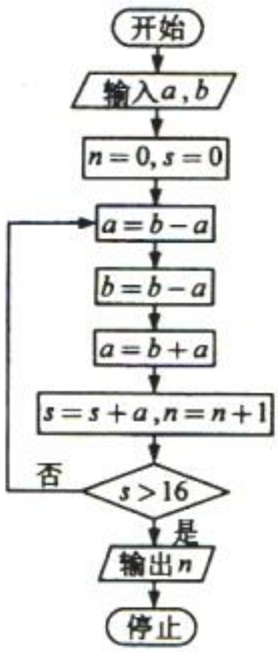
【答案】A

【解析】

试题分析：因为 $a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}>4^{\frac{2}{5}}=b$，$c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}>4^{\frac{2}{3}}=a$，所以 $b<a<c$，故选 A.

考点：幂函数的图象与性质.

（7）执行下图的程序框图，如果输入的 $a=4$，$b=6$，那么输出的 $n=$



（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

【答案】B

【解析】

试题分析：第一次循环，得 $a=2,b=4,a=6,s=6,n=1$；第二次循环，得 $a=-2,b=6,a=4,s=10$，$n=2$；第三次循环，得 $a=2,b=4,a=6,s=16,n=3$；第四次循环，得 $a=-2,b=6,a=4,s=20>16,n=4$，退出循环，输出 $n=4$，故选 B.

考点：程序框图.

（8）在△ABC 中，$B=\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$，则 $\cos A=$

（A）$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　（B）$\frac{\sqrt{10}}{10}$　（C）$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　（D）$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

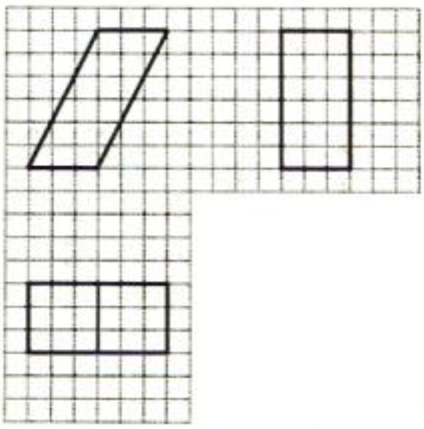
【答案】C

【解析】

试题分析：设 BC 边上的高线为 AD，则 $BC=3AD$，所以 $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{5}AD$，$AB=\sqrt{2}AD$．由余弦定理，知 $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{2AD^2+5AD^2-9AD^2}{2\times\sqrt{2}AD\times\sqrt{5}AD}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，故选 C.

考点：余弦定理.

(9) 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实现画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为



（A）$18+36\sqrt{5}$　（B）$54+18\sqrt{5}$　（C）90　（D）81

【答案】B

【解析】

试题分析：由三视图该几何体是以侧视图为底面的斜四棱柱，所以该几何体的表面积 $S=2\times3\times6+2\times3\times3+2\times3\times3\sqrt{5}=54+18\sqrt{5}$，故选 B. 学科&网

考点：空间几何体的三视图及表面积.

(10) 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球，若 $AB\perp BC$， $AB=6$，

$BC=8$， $AA_1=3$，

则 V 的最大值是

(A) 4π (B) $\dfrac{9\pi}{2}$ (C) 6π (D) $\dfrac{32\pi}{3}$

【答案】B

【解析】

试题分析：要使球的体积 V 最大，必须球的半径 R 最大．由题意知球的与直三棱柱的上下底面都相切时，球的半径取得最大值 $\dfrac{3}{2}$，此时球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi(\dfrac{3}{2})^3=\dfrac{9}{2}\pi$，故选 B.

考点：1、三棱柱的内切球；2、球的体积.

(11) 已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，A，B 分别为 C 的左，右顶点. P

为 C 上一点，且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中

点，则 C 的离心率为

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

【答案】A

【解析】

试题分析：由题意设直线 l 的方程为 $y=k(x+a)$，分别令 $x=-c$ 与 $x=0$ 得点 $|FM|=k(a-c)$，

$|OE|=ka$，由 $\Delta OBE\sim\Delta CBM$，得 $\dfrac{\frac{1}{2}|OE|}{|FM|}=\dfrac{|OB|}{|BC|}$，即 $\dfrac{ka}{2k(a-c)}=\dfrac{a}{a+c}$，整理，得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{3}$，所以椭圆离心率为 $e=\dfrac{1}{3}$，故选 A. 学.科.网

考点：椭圆方程与几何性质.

(12)定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$ 如下：$\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项，其中 m 项为 0，m 项为 1，且对任意 $k\le 2m$，

$a_1,a_2,\cdots,a_k$

中 0 的个数不少于 1 的个数. 若 $m=4$，则不同的“规范 01 数列”共有

(A) 18 个 (B) 16 个 (C) 14 个 (D) 12 个

【答案】C

【解析】

试题分析：由题意，得必有 $a_1=0$， $a_8=1$，则具体的排法列表如下：

<table>
<tr><td rowspan="14">0</td><td rowspan="9">0</td><td rowspan="4">0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="14">1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">1</td><td rowspan="3">0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="3">0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

考点：计数原理的应用．

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第（13）题~第（21）题为必考题，每个试题考生都必须作答。第（22）题~第（24）题未选考题，考生根据要求作答。

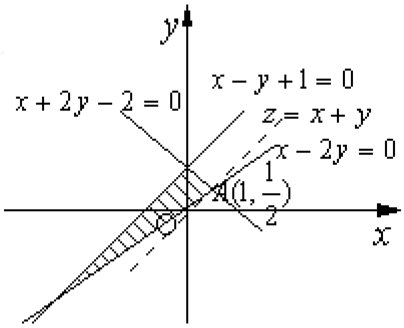
二、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分

（13）若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\geq 0 \\ x-2y\leq 0 \\ x+2y-2\leq 0 \end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为_____________.

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】

试题分析：作出不等式组满足的平面区域，如图所示，由图知，当目标函数 $z=x+y$ 经过点 $A(1,\frac{1}{2})$ 时取得最大值，即 $z_{max}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.



考点：简单的线性规划问题.

（14）函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图像至少向右平移____________个单位长度得到.

【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

【解析】

试题分析：因为 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$， $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})=2\sin[(x+\frac{\pi}{3})-\frac{2\pi}{3}]$，所以函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图像至少向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度得到.

考点：1、三角函数图象的平移变换；2、两角和与差的正弦函数.

（15）已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)+3x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是______________。

【答案】 $y=-2x-1$

【解析】

试题分析：当$x>0$时，$-x<0$，则$f(-x)=\ln x-3x$．又因为$f(x)$为偶函数，所以

$f(x)=f(-x)=\ln x-3x$，所以$f'(x)=\dfrac{1}{x}-3$，则切线斜率为$f'(1)=-2$，所以切线方程为

$y+3=-2(x-1)$，即$y=-2x-1$．

考点：1、函数的奇偶性与解析式；2、导数的几何意义．

（16）已知直线l：$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$与圆$x^2+y^2=12$交于A,B两点，过A,B分别做l的垂线与x轴

交于C,D两点，若$AB=2\sqrt{3}$，则$|CD|=$______________.

【答案】4

【解析】

试题分析：因为$|AB|=2\sqrt{3}$，且圆的半径为$2\sqrt{3}$，所以圆心$(0,0)$到直线$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$的距离为$\sqrt{R^2-(\dfrac{|AB|}{2})^2}=3$，则由$\dfrac{|3m-\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}}=3$，解得$m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，代入直线$l$的方程，得

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$，所以直线$l$的倾斜角为$30°$，由平面几何知识知在梯形$ABDC$中，

$|CD|=\dfrac{|AB|}{\cos 30°}=4$．

考点：直线与圆的位置关系．

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（17）（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=1+\lambda a_n$，其中$\lambda\neq 0$．

（I）证明$\{a_n\}$是等比数列，并求其通项公式；

（II）若$S_5=\dfrac{31}{32}$，求λ．

【答案】（I）$a_n=\dfrac{1}{1-\lambda}(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^{n-1}$；（II）$\lambda=-1$．

【解析】

试题分析：（Ⅰ）首先利用公式 $a_n=\begin{cases}S_1 & n=1\\ S_n-S_{n-1} & n\geq 2\end{cases}$，得到数列 $\{a_n\}$ 的递推公式，然后通过变换结合等比数列的定义可证；（Ⅱ）利用（Ⅰ）前 n 项和 S_n 化为 λ 的表达式，结合 S_5 的值，建立方程可求得 λ 的值.

试题解析：（Ⅰ）由题意得 $a_1=S_1=1+\lambda a_1$，故 $\lambda\neq 1$，$a_1=\dfrac{1}{1-\lambda}$，$a_1\neq 0$.

由 $S_n=1+\lambda a_n$，$S_{n+1}=1+\lambda a_{n+1}$ 得 $a_{n+1}=\lambda a_{n+1}-\lambda a_n$，即 $a_{n+1}(\lambda-1)=\lambda a_n$. 由 $a_1\neq 0$，$\lambda\neq 0$ 得 $a_n\neq 0$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.

因此 $\{a_n\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{1-\lambda}$，公比为 $\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ 的等比数列，于是 $a_n=\dfrac{1}{1-\lambda}(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^{n-1}$.

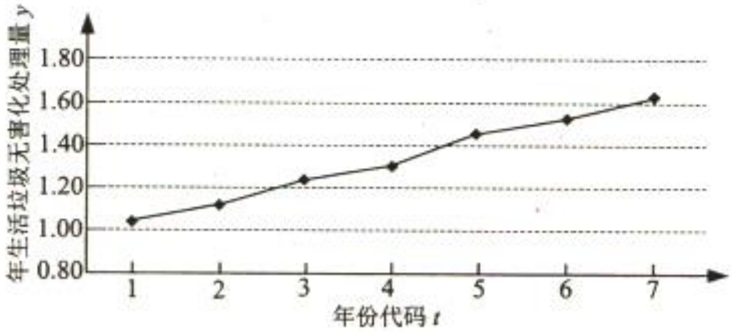
（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $S_n=1-(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^n$，由 $S_5=\dfrac{31}{32}$ 得 $1-(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^5=\dfrac{31}{32}$，即 $(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^5=\dfrac{1}{32}$，

解得 $\lambda=-1$.

考点：1、数列通项 a_n 与前 n 项和为 S_n 关系；2、等比数列的定义与通项及前 n 项和为 S_n.

（18）（本小题满分 12 分）

下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图



注：年份代码 1～7 分别对应年份 2008～2014.

（I）由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以说明；

（II）建立 y 关于 t 的回归方程（系数精确到 0.01），预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量。

参考数据：$\sum_{i=1}^{7}y_i=9.32$，$\sum_{i=1}^{7}t_iy_i=40.17$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=0.55$，$\sqrt{7}\approx 2.646$.

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，

回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2},\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}.$$

【答案】（Ⅰ）理由见解析；（Ⅱ）1.82 亿吨.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）根据相关系数 r 公式求出相关数据后，然后代入公式即可求得 r 的值，最后根据其值大小回答即可；（Ⅱ）利用最小二乘法的原理提供的回归方程，准确求得相关数据即可建立 y 关于 t 的回归方程，然后作预测.

试题解析：（Ⅰ）由折线图这数据和附注中参考数据得

$\bar{t}=4$，$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2=28$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=0.55$，

$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{7}t_iy_i-\bar{t}\sum_{i=1}^{7}y_i}=40.17-4\times9.32=2.89$，

$$r\approx\frac{2.89}{0.55\times2\times2.646}\approx0.99.$$

因为 y 与 t 的相关系数近似为 0.99，说明 y 与 t 的线性相关相当高，从而可以用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系.

（Ⅱ）由 $\bar{y}=\frac{9.32}{7}\approx1.331$ 及（Ⅰ）得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{2.89}{28}\approx0.103$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}\approx1.331-0.103\times4\approx0.92$.

所以，y 关于 t 的回归方程为：$\hat{y}=0.92+0.10t$.

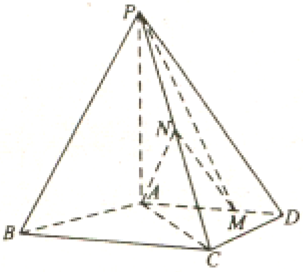
将 2016 年对应的 $t=9$ 代入回归方程得：$\hat{y}=0.92+0.10\times9=1.82$.

所以预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量将约 1.82 亿吨.

考点：线性相关与线性回归方程的求法与应用.

（19）（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 地面 $ABCD$，$AD\,P\,BC$，$AB=AD=AC=3$，$PA=BC=4$，M 为线段 AD 上一点，$AM=2MD$，N 为 PC 的中点.



（I）证明 MN P 平面 PAB；学科&网

（II）求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.

【答案】（Ⅰ）见解析；（Ⅱ）$\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）取 PB 的中点 T，然后结合条件中的数据证明四边形 $AMNT$ 为平行四边形，从而得到 $MN \parallel AT$，由此结合线面平行的判断定理可证；（Ⅱ）以 A 为坐标原点，以 AD, AP 所在直线分别为 y, z 轴建立空间直角坐标系，然后通过求直线 AN 的方向向量与平面 PMN 法向量的夹角来处理 AN 与平面 PMN 所成角．学科&网

试题解析：（Ⅰ）由已知得 $AM=\dfrac{2}{3}AD=2$，取 BP 的中点 T，连接 AT, TN，由 N 为 PC 中点知 $TN \parallel BC$，$TN=\dfrac{1}{2}BC=2$.

又 $AD \parallel BC$，故 TN 平行且等于 AM，四边形 $AMNT$ 为平行四边形，于是 $MN \parallel AT$.

因为 $AT \subset$ 平面 PAB，$MN \not\subset$ 平面 PAB，所以 $MN \parallel$ 平面 PAB.

（Ⅱ）取 BC 的中点 E，连结 AE，由 $AB=AC$ 得 $AE \perp BC$，从而 $AE \perp AD$，且

$$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{AB^2-(\frac{BC}{2})^2}=\sqrt{5}.$$

以 A 为坐标原点，$\vec{AE}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，由题意知，

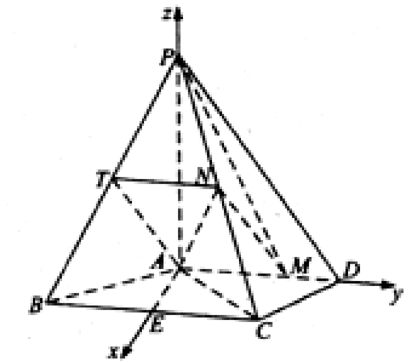
$P(0,0,4)$，$M(0,2,0)$，$C(\sqrt{5},2,0)$，$N(\dfrac{\sqrt{5}}{2},1,2)$，

$\overrightarrow{PM}=(0,2,-4)$，$\overrightarrow{PN}=(\dfrac{\sqrt{5}}{2},1,-2)$，$\overrightarrow{AN}=(\dfrac{\sqrt{5}}{2},1,2)$.

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 PMN 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PN}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x-4z=0\\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}x+y-2z=0\end{cases}$，可取

$\vec{n}=(0,2,1)$，

于是$|\cos<\vec{n},\overrightarrow{AN}>|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{AN}|}=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.



考点：1、空间直线与平面间的平行与垂直关系；2、棱锥的体积.

（20）（本小题满分 12 分）

已知抛物线C：$y^2=2x$的焦点为F，平行于x轴的两条直线l_1,l_2分别交C于A，B两点，交C的准线于P，Q两点.

（I）若F在线段AB上，R是PQ的中点，证明$AR\parallel FQ$；

（II）若ΔPQF的面积是ΔABF的面积的两倍，求AB中点的轨迹方程.

【答案】（Ⅰ）见解析；（Ⅱ）$y^2=x-1$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）设出与x轴垂直的两条直线，然后得出A,B,P,Q,R的坐标，然后通过证明直线AR与直线FQ的斜率相等即可证明结果了；（Ⅱ）设直线l与x轴的交点坐标$D(x_1,0)$，利用面积可求得x_1，设出AB的中点$E(x,y)$，根据AB与x轴是否垂直分两种情况结合$k_{AB}=k_{DE}$求解，

试题解析：由题设$F(\frac{1}{2},0)$.设$l_1:y=a,l_2:y=b$，则$ab\neq0$，且

$$A(\frac{a^2}{2},0),B(\frac{b^2}{2},b),P(-\frac{1}{2},a),Q(-\frac{1}{2},b),R(-\frac{1}{2},\frac{a+b}{2}).$$

记过A,B两点的直线为l，则l的方程为$2x-(a+b)y+ab=0$. 3分

（Ⅰ）由于F在线段AB上，故$1+ab=0$.

记AR的斜率为k_1，FQ的斜率为k_2，则

$$k_1=\frac{a-b}{1+a^2}=\frac{a-b}{a^2-ab}=\frac{1}{a}=\frac{-ab}{a}=-b=k_2.$$

所以$AR\parallel FQ$. 5分

（Ⅱ）设l与x轴的交点为$D(x_1,0)$，

则$S_{\Delta ABF}=\frac{1}{2}|b-a||FD|=\frac{1}{2}|b-a|\left|x_1-\frac{1}{2}\right|, S_{\Delta PQF}=\frac{|a-b|}{2}$.

由题设可得$\frac{1}{2}|b-a|\left|x_1-\frac{1}{2}\right|=\frac{|a-b|}{2}$，所以$x_1=0$（舍去），$x_1=1$.

设满足条件的AB的中点为$E(x,y)$.

当AB与x轴不垂直时，由$k_{AB}=k_{DE}$可得$\frac{2}{a+b}=\frac{y}{x-1}(x\neq 1)$.

而$\frac{a+b}{2}=y$，所以$y^2=x-1(x\neq 1)$.

当AB与x轴垂直时，E与D重合.所以，所求轨迹方程为$y^2=x-1$. ....12 分

考点：1、抛物线定义与几何性质；2、直线与抛物线位置关系；3、轨迹求法.

（21）（本小题满分 12 分）

设函数$f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$，其中$a>0$，记$|f(x)|$的最大值为$A$.

（Ⅰ）求$f'(x)$；

（Ⅱ）求A；

（Ⅲ）证明$|f'(x)|\leq 2A$.

【答案】（Ⅰ）$f'(x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$；（Ⅱ）$A=\begin{cases}2-3a, 0<a\leq\frac{1}{5}\\ \frac{a^2+6a+1}{8a}, \frac{1}{5}<a<1\\ 3a-2, a\geq 1\end{cases}$；（Ⅲ）见解析.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）直接可求$f'(x)$；（Ⅱ）分$a\geq 1, 0<a<1$两种情况，结合三角函数的有界性求出A，但须注意当$0<a<1$时还须进一步分为$0<a\leq\frac{1}{5}, \frac{1}{5}<a<1$两种情况求解；（Ⅲ）首先由（Ⅰ）得到

$|f'(x)|\leq 2a+|a-1|$，然后分$a\geq 1$，$0<a\leq\frac{1}{5}, \frac{1}{5}<a<1$三种情况证明

试题解析：（Ⅰ）$f'(x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$.

（Ⅱ）当$a\ge 1$时，

$|f'(x)|=|a\sin 2x+(a-1)(\cos x+1)|\le a+2(a-1)=3a-2=f(0)$

因此，$A=3a-2$．　　　　………4 分

当$0<a<1$时，将$f(x)$变形为$f(x)=2a\cos^2 x+(a-1)\cos x-1$．

令$g(t)=2at^2+(a-1)t-1$，则A是$|g(t)|$在$[-1,1]$上的最大值，$g(-1)=a$，$g(1)=3a-2$，

且当$t=\frac{1-a}{4a}$时，$g(t)$取得极小值，极小值为$g(\frac{1-a}{4a})=-\frac{(a-1)^2}{8a}-1=-\frac{a^2+6a+1}{8a}$．

令$-1<\frac{1-a}{4a}<1$，解得$a<-\frac{1}{3}$（舍去），$a>\frac{1}{5}$．

（ⅰ）当$0<a\le\frac{1}{5}$时，$g(t)$在$(-1,1)$内无极值点，$|g(-1)|=a$，$|g(1)|=2-3a$，$|g(-1)|<|g(1)|$，所以$A=2-3a$．

（ⅱ）当$\frac{1}{5}<a<1$时，由$g(-1)-g(1)=2(1-a)>0$，知$g(-1)>g(1)>g(\frac{1-a}{4a})$．

又$|g(\frac{1-a}{4a})|-|g(-1)|=\frac{(1-a)(1+7a)}{8a}>0$，所以$A=|g(\frac{1-a}{4a})|=\frac{a^2+6a+1}{8a}$．

综上，$A=\begin{cases}2-3a,0<a\le\frac{1}{5}\\ \frac{a^2+6a+1}{8a},\frac{1}{5}<a<1\\ 3a-2,a\ge 1\end{cases}$．　　　　………9 分

（Ⅲ）由（Ⅰ）得$|f'(x)|=|-2a\sin 2x-(a-1)\sin x|\le 2a+|a-1|$．

当$0<a\le\frac{1}{5}$时，$|f'(x)|\le 1+a\le 2-4a<2(2-3a)=2A$．

当$\frac{1}{5}<a<1$时，$A=\frac{a}{8}+\frac{1}{8a}+\frac{3}{4}\ge 1$，所以$|f'(x)|\le 1+a<2A$．

当$a\ge 1$时，$|f'(x)|\le 3a-1\le 6a-4=2A$，所以$|f'(x)|\le 2A$．

考点：1、三角恒等变换；2、导数的计算；3、三角函数的有界性．

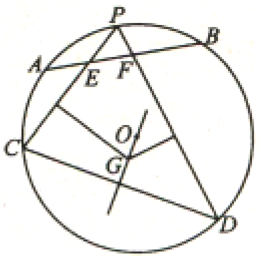
请考生在[22]、[23]、[24]题中任选一题作答。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目题号后的方框涂黑。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲

如图，⊙O中$\overset{\frown}{AB}$的中点为P，弦PC，PD分别交AB于E，F两点．

（I）若 $\angle PFB=2\angle PCD$，求 $\angle PCD$ 的大小；

（II）若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G，证明 $OG\perp CD$.



【答案】（Ⅰ）$60°$；（Ⅱ）见解析.

【解析】

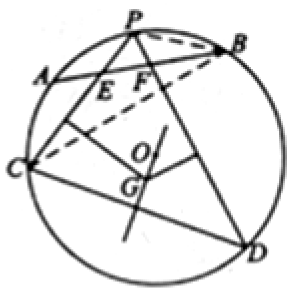
试题分析：（Ⅰ）根据条件可证明 $\angle PFB$ 与 $\angle PCD$ 是互补的，然后结合 $\angle PFB=2\angle PCD$ 与三角形内角和定理，不难求得 $\angle PCD$ 的大小；（Ⅱ）由（Ⅰ）的证明可知 C,E,F,D 四点共圆，然后根据用线段的垂直平分线知 G 为四边形 $CEFD$ 的外接圆圆心，则可知 G 在线段 CD 的垂直平分线上，由此可证明结果．学.科网

试题解析：（Ⅰ）连结 PB,BC，则 $\angle BFD=\angle PBA+\angle BPD,\angle PCD=\angle PCB+\angle BCD$.

因为 $AP=BP$，所以 $\angle PBA=\angle PCB$，又 $\angle BPD=\angle BCD$，所以 $\angle BFD=\angle PCD$.

又 $\angle PFD+\angle BFD=180^\circ,\angle PFB=2\angle PCD$，所以 $3\angle PCD=180^\circ$，因此 $\angle PCD=60^\circ$.

（Ⅱ）因为 $\angle PCD=\angle BFD$，所以 $\angle PCD+\angle EFD=180^\circ$，由此知 C,D,F,E 四点共圆，其圆心既在 CE 的垂直平分线上，又在 DF 的垂直平分线上，故 G 就是过 C,D,F,E 四点的圆的圆心，所以 G 在 CD 的垂直平分线上，因此 $OG\perp CD$.



考点：1、圆周角定理；2、三角形内角和定理；3、垂直平分线定理；4、四点共圆.

23.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ为参数)，以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

（I）写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（II）设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

【答案】（Ⅰ）C_1的普通方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，C_2的直角坐标方程为$x+y-4=0$；（Ⅱ）$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）利用同角三角函数基本关系中的平方关系化曲线C_1的参数方程普通方程，利用公式$\rho\cos\theta=x$与$\rho\sin\theta=y$代入曲线C_2的极坐标方程即可；（Ⅱ）利用参数方程表示出点P的坐标，然后利用点到直线的距离公式建立$|PQ|=d(\alpha)$的三角函数表达式，然后求出最值与相应的点P坐标即可.

试题解析：（Ⅰ）C_1的普通方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，C_2的直角坐标方程为$x+y-4=0$. ……5分

（Ⅱ）由题意，可设点P的直角坐标为$(\sqrt{3}\cos\alpha,\sin\alpha)$，因为$C_2$是直线，所以$|PQ|$的最小值，

即为P到C_2的距离$d(\alpha)$的最小值，$d(\alpha)=\frac{|\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})-2|$.

………………8分

当且仅当$\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$时，$d(\alpha)$取得最小值，最小值为$\sqrt{2}$，此时$P$的直角坐标为

$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$. ………………10分

考点：1、椭圆的参数方程；2、直线的极坐标方程.

24.（本小题满分10分）选修4-5：不等式选讲

已知函数$f(x)=|2x-a|+a$

（I）当a=2时，求不等式$f(x)\le 6$的解集；

（II）设函数$g(x)=|2x-1|$，当$x\in\mathbf{R}$时，$f(x)+g(x)\ge 3$，求a的取值范围.

【答案】（Ⅰ）$\{x|-1\le x\le 3\}$；（Ⅱ）$[2,+\infty)$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）利用等价不等式$|h(x)|\le a\Leftrightarrow -a\le h(x)\le a$，进而通过解不等式可求得；（Ⅱ）根据条件可首先将问题转化求解$f(x)+g(x)$的最小值，此最值可利用三角形不等式求得，再根据恒成立的意义建立简单的关于a的不等式求解即可.

试题解析：（Ⅰ）当$a=2$时，$f(x)=|2x-2|+2$.

解不等式$|2x-2|+2\le 6$，得$-1\le x\le 3$.

因此，$f(x)\le 6$的解集为$\{x|-1\le x\le 3\}$. …………………5分

（Ⅱ）当$x\in R$时，$f(x)+g(x)=|2x-a|+a+|1-2x|$

$\ge|2x-a+1-2x|+a$

$=|1-a|+a$，

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立，

所以当 $x\in R$ 时，$f(x)+g(x)\geq 3$ 等价于 $|1-a|+a\geq 3$． ① ……7 分

当 $a\leq 1$ 时，①等价于 $1-a+a\geq 3$，无解.

当 $a>1$ 时，①等价于 $a-1+a\geq 3$，解得 $a\geq 2$．

所以 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$． ………………10 分

考点：1、绝对值不等式的解法；2、三角形绝对值不等式的应用.