2023年普通高等学校招生全国统一考试
高三第三次联合诊断检测　数学

数学测试卷共4页，满分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"准考证号、姓名、考试科目"与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用0.5毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答。若在试题卷上作答，答案无效。
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面上，复数$(-1+2i)^2$对应的点在

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2. 已知集合$A=\{x\in\mathbf{Q}|(x-1)(x^2-2)=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|(x-1)(x^2-2)=0\}$，则下列关系正确的是

A．$A=B$　　B．$A\subseteq B$　　C．$B\subseteq A$　　D．$A\cap B=\varnothing$

3. 从小到大排列的数据1，2，3，x，4，5，6，7，8，y，9，10的第三四分位数为

A．3　　B．$\dfrac{3+x}{2}$　　C．8　　D．$\dfrac{8+y}{2}$

4. 二项式$(a+b)^n(n\in\mathbf{N}^*)$展开式的第$r$项系数与第$r+1$项系数之比为

A．$\dfrac{r+1}{n-r+2}$　　B．$\dfrac{r}{n-r+1}$　　C．$\dfrac{r}{n-r}$　　D．$\dfrac{r-1}{n-r}$

5. 将函数$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$的图象向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位得到函数$g(x)$的图象，则"$\varphi=\dfrac{3\pi}{8}$"是"函数$g(x)$为偶函数"的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6. 已知$\boldsymbol{a}$是单位向量，向量$\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{a})$满足$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$成角$60^\circ$，则$|\boldsymbol{b}|$的取值范围是

A．$(\dfrac{1}{2},+\infty)$　　B．$(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$

7. 已知直线$y=ax-a$与曲线$y=x+\dfrac{a}{x}$相切，则实数$a=$

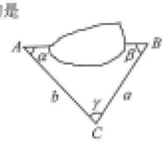
A．0　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

8．已知n棱柱$(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3)$的所有顶点都在半径为1的球面上，则当该棱柱的体积最大时，其上下底面之间的距离为

A．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．如图，为了测量障碍物两侧A,B之间的距离，一定能根据以下数据确定AB长度的是



A．a,b,γ　　B．α,β,γ

C．a,β,γ　　D．α,β,b

10．对于数列$\{a_n\}$，若$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}=2n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则下列说法正确的是

A．$a_4=3$　　B．数列$\{a_n\}$是等差数列

C．数列$\{a_{2n-1}\}$是等差数列　　D．$a_{2n}=2n-1$

11．已知函数$f(x)=\cos x+\sin 2x$，则下列说法正确的是

A．函数$f(x)$的最小正周期是π　　B．$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使$f(x_0)>f(\dfrac{\pi}{4})$

C．在$[0,2\pi]$内$f(x)$有4个零点　　D．函数$f(x)$的图象是中心对称图形

12．函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上不恒为零的可导函数，对任意的$x,y\in\mathbf{R}$均满足：$(x+y)\cdot f(x)f(y)=xy\cdot f(x+y)$，$f(1)=2$，则

A．$f(0)=0$　　B．$f(2)=8$

C．$f'(1)=4$　　D．$\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知随机变量$X\sim N(6,\sigma^2)$，若$P(X\geqslant 8)=0.272$，则$P(X>4)=$________.

14．已知$x,\ y>0$，$2x-y=1$，则$x+\dfrac{1}{y}$的最小值为_______.

15．过直线$x+y+1=0$上任一点P作直线PA,PB与圆$x^2+y^2-2x=0$相切，A,B为切点，则AB的最小值为_______.

16．已知F_1,F_2分别为椭圆的左右焦点，P是椭圆上一点，$\angle PF_1F_2=3\angle PF_2F_1$，$\angle PF_2F_1\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$，则椭圆离心率的取值范围为_________.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$S_{n+1}=2S_n+1\ (n\in\mathbf{N}_+)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=a_na_{n+1}+\log_2(a_na_{n+1})\ (n\in\mathbf{N}_+)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

18.（12分）

已知$\triangle ABC$的内角A, B, C的对边分别为a, b, c，$\sin(A-B)\tan C=\sin A\sin B$.

（1）求$\dfrac{a^2+c^2}{b^2}$；

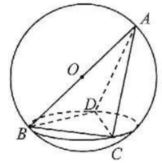
（2）若$\cos B=\dfrac{2}{3}$，求$\sin A$.

19.（12分）

如图，四面体$ABCD$的顶点都在以AB为直径的球面上，底面BCD是边长为$\sqrt{3}$的等边三角形，球心O到底面的距离为1.

（1）求球O的表面积；

（2）求二面角$B-AC-D$的余弦值.



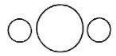
20.（12分）

投壶是从先秦延续至清末的中国传统礼仪和宴饮游戏，投壶礼来源于射礼. 投壶的横截面是三个圆形，投掷者站在距离投壶一定距离的远处将箭羽投向三个圆形的壶口，若箭羽投进三个圆形壶口之一就算投中. 为弘扬中华传统文化，某次文化活动进行了投壶比赛，比赛规定投进中间较大圆形壶口得3分，投进左右两个小圆形壶口

得1分，没有投进壶口不得分．甲乙两人进行投壶比赛，比赛分为若干轮，每轮每人投一支箭羽，最后将各轮所得分数相加即为该人的比赛得分，比赛得分高的人获胜．已知甲每轮投一支箭羽进入中间大壶口的概率为$\frac{1}{3}$，投进入左右两个小壶口的概率都是$\frac{1}{6}$，乙每轮投一支箭羽进入中间大壶口的概率为$\frac{1}{4}$，投进入左右两个小壶口的概率分别是$\frac{1}{5}$和$\frac{1}{6}$，甲乙两人每轮是否投中相互独立，且两人各轮之间是否投中也互相独立．若在最后一轮比赛前，甲的总分落后乙1分，设甲最后一轮比赛的得分为X，乙最后一轮比赛的得分为Y．

（1）求甲最后一轮结束后赢得比赛的概率；

（2）求$|X-Y|$的数学期望．



投壶横截面

21．（12分）

已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上、下顶点分别为$A, B$，左顶点为$D$，$\triangle ABD$是面积为$\sqrt{3}$的正三角形．

（1）求椭圆C的方程；

（2）过椭圆C外一点$M(m, 0)$的直线交椭圆C于P, Q两点，已知点P与点P'关于x轴对称，点Q与点Q'关于x轴对称，直线PQ'与$P'Q$交于点K，若$\angle AKB$是钝角，求m的取值范围．

22．（12分）

已知函数$f(x)=k^x$，$g(x)=k\ln x$，$h(x)=kx-1 \quad (k>0, k\neq 1)$．

（1）求曲线$y=f(x)-g(x)$在$x=1$处的切线方程；

（2）求使得$f(x)\geqslant h(x)\geqslant g(x)$在$x\in(0, +\infty)$上恒成立的$k$的最小整数值．