数学·黑卷

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题5分，共40分）

1. C　2. D　3. B　4. B　5. A　6. B　7. D　8. C

二、选择题（每小题5分，共20分）

9. ABC　10. BCD　11. AD　12. BD

三、填空题（每小题5分，共20分）

13. 10　14. $\frac{4}{9}$　15. 4　16. $\frac{8}{\pi+2}$ cm；$\frac{128\pi}{(\pi+2)^2}$ cm^3

四、解答题（共70分）

17. 解：

(1)由 $2a\cos B=2c+b$ 及正弦定理，

得 $2\sin A\cos B=2\sin C+\sin B$，

即 $2\sin A\cos B=2\sin(A+B)+\sin B$，

所以 $(2\cos A+1)\sin B=0$. ……（3分）

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $2\cos A+1=0$，所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$.

又因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ……（5分）

(2)因为 $a=3\sqrt{3}$，$b=3$，又由(1)得 $\cos A=-\frac{1}{2}$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $(3\sqrt{3})^2=3^2+c^2-2\times3c\times(-\frac{1}{2})$，

整理得 $c^2+3c-18=0$，解得 $c=3$ 或 $c=-6$（负值舍去）. ……（8分）

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. ……（10分）

（利用正弦定理求出 B，进而得到 C，利用 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 求解也可）

18. 解：

(1)由 $a_{n+1}=2a_n+1$，

则 $a_3=2a_2+1$，$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$.

又 $a_1+2a_2=a_3$，所以 $2a_2+1=a_1+2a_2$，

解得 $a_1=1$，所以 $a_1+1=2$. ……（3分）

所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以2为首项，2为公比的等比数列， ……（4分）

所以 $a_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$，

所以 $a_n=2^n-1$. ……（6分）

(2)因为 $a_n=2^n-1$，

所以 $S_n=2^1+2^2+\cdots+2^n-n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$. ……（8分）

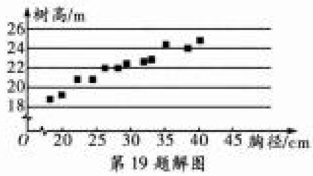
因为 $S_n\leqslant121$，

所以 $2^{n+1}-2-n\leqslant121$，即 $2^{n+1}-n\leqslant123$. ……（11分）

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $1\leqslant n\leqslant6$，所以使得不等式成立的 n 的最大值为6. ……（12分）

19. 解：

(1)作出散点图如下：



第19题解图

……（3分）

(2)由散点图可以看出,当胸径 x 由小变大时,树高 y 也由小变大,从而 y 与 x 之间是正相关关系. ……(4分)

由表中的数据可得,

$\overline{x}=\frac{1}{12}(18.1+20.1+22.2+24.4+26.0+28.3+29.6+32.4+33.7+35.7+38.3+40.2)=\frac{349}{12}\approx 29.08$,

$\overline{y}=\frac{1}{12}(18.8+19.2+21.0+21.0+22.1+22.1+22.4+22.6+23.0+24.3+23.9+24.7)=\frac{265.1}{12}\approx 22.09$.

从而 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{12}x_iy_i-12\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{12}x_i^2-12\overline{x}^2}\approx\frac{7851.03-12\times 29.08\times 22.09}{10715.74-12\times 29.08^2}\approx\frac{142.50}{567.98}\approx 0.25$, ……(6分)

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\approx 22.09-0.25\times 29.08=14.82$, ……(8分)

从而 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.25x+14.82$. ……(9分)

(3)当 $x=50.6$ 时,$\hat{y}=0.25\times 50.6+14.82=27.47$,

即当树的胸径为 50.6 cm 时,树的高度约是 27.47 m. ……(12分)

20. 解:

(1)存在,当点 F 为线段 B_1C_1 的中点时,平面 A_1AF // 平面 ECC_1. ……(1分)

证明:在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,AA_1 // CC_1,AD // B_1C_1.

又因为 $CC_1\subset$ 平面 ECC_1,$AA_1\not\subset$ 平面 ECC_1,

所以 AA_1 // 平面 ECC_1. ……(2分)

又 E 为 AD 的中点,F 为 B_1C_1 的中点,

所以 AE // FC_1,且 $AE=FC_1$.

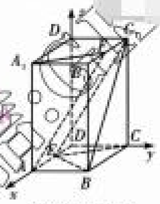
故四边形 AEC_1F 为平行四边形,所以 AF // EC_1. ……(4分)

又因为 $EC_1\subset$ 平面 ECC_1,$AF\not\subset$ 平面 ECC_1,所以 AF // 平面 ECC_1.

又因为 $AF\cap AA_1=A$,$AA_1\subset$ 平面 A_1AF,$AF\subset$ 平面 A_1AF,

所以平面 A_1AF // 平面 ECC_1. ……(6分)

(2)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$,如图所示. ……(7分)



第 20 题解图

因为 $AD=2$,$AA_1=4$,所以 $A(2,0,0)$,$E(1,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C_1(0,2,4)$,$A_1(2,0,4)$,

所以 $\overrightarrow{EC_1}=(-1,2,4)$,$\overrightarrow{EB}=(1,2,0)$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$. ……(8分)

设平面 EBC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}-x+2y+4z=0\\ x+2y=0\end{cases}$.

令 $x=2$,则 $y=-1$,$z=1$,所以 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$.

因为 $\overrightarrow{AA_1}=8\overrightarrow{AG}$,设 $G(x_0,y_0,z_0)$,则 $(0,0,4)=8(x_0-2,y_0,z_0)$,

所以 $G(2,0,\frac{1}{2})$,则 $\overrightarrow{EG}=(1,0,\frac{1}{2})$. ……(10分)

设 EG 与平面 EBC_1 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EG},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EG}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$,

即 $\cos\theta=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}})^2}=\sqrt{1-\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故 EG 与平面 EBC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ……(12分)

21. 解：

(1)对 $ae^a=e^6$ 两边取自然对数，得 $\ln a+a=6$①. ……（1分）

对 $b(\ln b-2)=e^{3\lambda-1}$ 两边取自然对数，得 $\ln b+\ln(\ln b-2)=3\lambda-1$，

即 $\ln b-2+\ln(\ln b-2)=3\lambda-3$②. ……（2分）

因为方程①、②为两个同构方程，所以 $3\lambda-3=6$，解得 $\lambda=3$. ……（3分）

设 $\varphi(x)=\ln x+x, x>0$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以方程 $\varphi(x)=6$ 的解只有一个. ……（4分）

所以 $a=\ln b-2$，所以 $ab=(\ln b-2)b=b(\ln b-2)=e^{3\times3-1}=e^8$，故 $ab=e^8$. ……（5分）

(2)由(1)知 $f(x)=x(\ln x+\dfrac{1}{3}\lambda)=x(\ln x+\dfrac{1}{3}\times3)=x\ln x+x, x\in(0,+\infty)$.

所以 $f'(x)=\ln x+2$，$k=\dfrac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

要证 $x_1<\dfrac{1}{k}<x_2$，即证明 $x_1<\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<x_2$，等价于 $1<\dfrac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}<\dfrac{x_2}{x_1}$. ……（7分）

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}(t>1)$，则只要证 $1<\dfrac{t-1}{\ln t}<t$ 即可. ……（8分）

由 $t>1$，知 $\ln t>0$，故等价于证 $\ln t<t-1<t\ln t(t>1)$. ……（9分）

①设 $g(t)=t-1-\ln t(t>1)$，则 $g'(t)=1-\dfrac{1}{t}>0(t>1)$，即 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $g(t)>g(1)=0$，即 $t-1>\ln t$.

②设 $h(t)=t\ln t-(t-1)(t>1)$，则 $h'(t)=\ln t>0(t>1)$，即 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $h(t)>h(1)=0$，即 $t-1<t\ln t$.

由①②可知 $\ln t<t-1<t\ln t$ 成立，则 $x_1<\dfrac{1}{k}<x_2$. ……（12分）

22. 解：

(1)因为 $\dfrac{(-1)^2}{4}+(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}<1$，所以点 $(-1,\dfrac{1}{2})$ 在椭圆 C 的内部，

则椭圆 C 存在以点 $(-1,\dfrac{1}{2})$ 为中点的弦. ……（1分）

设弦所在的直线 l 与椭圆 C 相交于 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\\\dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2=1\end{cases}$，

两式相减，得 $\dfrac{x_2^2}{4}-\dfrac{x_1^2}{4}+y_2^2-y_1^2=0$，所以 $\dfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{4}+(y_2-y_1)(y_2+y_1)=0$.

又 $x_1+x_2=-2$，$y_1+y_2=1$，

所以 $\dfrac{(x_2-x_1)(-2)}{4}+(y_2-y_1)\times1=0$，所以 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{2}$.

所以直线 l 的方程为 $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(x+1)$，即 $x-2y+2=0$. ……（4分）

(2)因为 A,P,G 三点共线，所以可知当线段 GH 的长度取得最小值时，直线 AP 的斜率 k 显然存在，且 $k>0$，$A(-2,0)$，

设直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)$，从而点 $G(\dfrac{3}{k}-2,3)$. ……（6分）

联立 $\begin{cases}y=k(x+2)\\\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消 y 整理得 $(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$.

设点 $P(x_0,y_0)$，则 $(-2)\cdot x_0=\dfrac{16k^2-4}{1+4k^2}$.

所以 $x_0=\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}$，从而 $y_0=\dfrac{4k}{1+4k^2}$，所以点 $P(\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2},\dfrac{4k}{1+4k^2})$. ……（8分）

又点 $B(2,0)$，则直线 PB 的斜率为 $-\dfrac{1}{4k}$.

由 $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{4k}(x-2)\\y=3\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=-12k+2\\y=3\end{cases}$，所以 $H(-12k+2,3)$.

故 $|GH| = |\frac{3}{k} - 2 + 12k - 2| = |\frac{3}{k} + 12k - 4|$. ……………………………………………………（10 分）

又 $k>0$，则 $\frac{3}{k} + 12k \geqslant 2\sqrt{\frac{3}{k} \cdot 12k} = 12$，当且仅当 $\frac{3}{k} = 12k$，即 $k = \frac{1}{2}$ 时等号成立.

所以当 $k = \frac{1}{2}$ 时，线段 GH 的长度取得最小值.

所以此时直线 GP 的斜率为 $\frac{1}{2}$. ……………………………………………………（12 分）

详解详析

1. C 【命题立意】本题考查集合的补运算，考查运算求解能力.

【解题思路】因为 $A = \{0,1,2,3,4,5,8\}$，$B = \{1,2,4,8\}$，所以 $\complement_A B = \{0,3,5\}$.

2. D 【命题立意】本题考查复数的乘法运算，考查运算求解能力.

【解题思路】$(1+2i)(3-4i) = 3-4i+6i+8 = 11+2i$.

3. B 【命题立意】本题考查数学模型及计算，考查运算求解能力及化归与转化思想、函数与方程思想.

【解题思路】$C=3$，当 $I=e^2$ 时，$S=7$，所以 $7 = k\ln e^2 + 3 = 2k+3$，解得 $k=2$，所以 $S = 2\ln I + 3$. 若 $S = 3\ln 3$，则 $3\ln 3 = 2\ln I + 3$，所以 $\ln 27 = 2\ln I + \ln e^3$，所以 $I^2e^3 = 27$，故 $I = \sqrt{\frac{27}{e^3}} \approx 1.16$.

4. B 【命题立意】本题考查与解三角形结合的数学文化，考查运算求解能力、应用意识及数形结合思想.

【解题思路】

解法一 在 $\triangle ACD$ 中，因为 $\tan\angle DAC = \tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$，

所以 $AC = \sqrt{3}CD$；

在 $\triangle BCD$ 中，因为 $\tan\angle DBC = \tan 45^\circ = \frac{CD}{BC}$，所以 $BC = CD$；

则 $AB = AC - BC = (\sqrt{3}-1)CD$，得 $CD = \frac{14}{\sqrt{3}-1}$，

则 $CD \approx 19$ 米. 故岳阳楼的高度 CD 约为 19 米.

解法二 在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ADB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{BD}{\sin 30^\circ}$，则 $BD = \frac{AB\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}$，在 $\triangle BCD$ 中，$CD = BD\sin 45^\circ = \frac{AB\sin 30^\circ \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}$，又 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，所以 $CD = \frac{14 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \approx 19$ 米. 故岳阳楼的高度 CD 约为 19 米.

5. A 【命题立意】本题考查平面向量的数量积和模长，考查运算求解能力及函数与方程思想.

【解题思路】因为 $-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $m\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $\frac{-1}{m} = \frac{2}{3}$，$m = -\frac{3}{2}$. 又 $|\boldsymbol{a}| = 3|\boldsymbol{b}| = 2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1$，所以 $|m\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}| = |-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}| = \sqrt{\frac{9}{4}|\boldsymbol{a}|^2 + 9|\boldsymbol{b}|^2 - 2\times\frac{3}{2}\times 3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}} = 2$.

6. B 【命题立意】本题考查排列组合，考查推理论证能力、运算求解能力及分类与整合思想.

【解题思路】若 A 安排在第一个位置，再排 D,E,F 有 A_3^3 种，B,C 不相邻则用插空法，满足条件的排法有 $A_3^3A_4^2 = 72$ 种；

若 A 安排在第二个位置，第一个位置安排 B 或 C，再安排其它，则排法有 $C_2^1A_4^4 = 48$ 种；

若 A 安排在第二个位置，第一个位置不安排 B 或 C，从 D，

【易错】容易忽略 B,C [illegible]个位置.

E,F 中选一个安排在第一个位置有 C_3^1 种，再排其它两个有 A_2^2 种，最后排 B,C 插空，此时有 $C_3^1A_2^2A_3^2 = 36$ 种；

所以共有不同排法 $72+48+36 = 156$ 种.

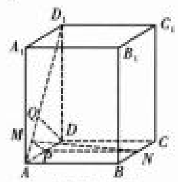
7. D 【命题立意】本题考查异面直线所成角，考查空间想象能力、运算求解能力及数形结合思想、化归与转化思想.

【解题思路】如图，取 AD 的中点 P，连接 PN，PM，易知 $PN /\!/ C_1D_1$，所以 $\angle PNM$ 即为异面直线 C_1D_1 与 MN 所成的角.

【难点】通过平行将异面直线平移到同一平面得到其所成的角.

在长方体中，因为 P,N 分别是 AD,BC 的中点，所以 $PN\perp$ 平面 ADD_1A_1，又 $MP\subset$ 平面 ADD_1A_1，则 $PN\perp MP$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle PMN$ 中，因为 $PN = AB = 3$，当 MP 取得最小值时，$\angle PNM$ 最小，此时 $\tan\angle PNM$ 有最小值.

在 $\triangle ADD_1$ 中，$AD=3$，$DD_1=4$，所以 $AD_1=5$，过 D 作 $DQ\perp AD_1$，所以 $DQ = \frac{AD\cdot DD_1}{AD_1} = \frac{12}{5}$，当 $PM\perp AD_1$ 时，MP 取得最小值，因为 P 是 AD 中点，所以 $PM = \frac{1}{2}DQ = \frac{6}{5}$，所以 $\tan\angle PNM = \frac{PM}{PN} = \frac{2}{5}$. 即异面直线 C_1D_1 与 MN 所成角的正切值的最小值为 $\frac{2}{5}$.



第 7 题解图

8. C 【命题立意】本题考查函数综合,考查运算求解能力及化归与转化思想、函数与方程思想.

解法一

审题指导

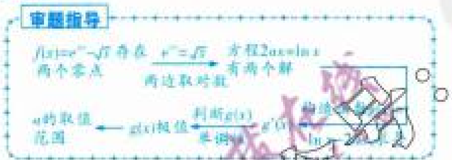
【解题思路】显然$f(0)=1$,$f(x)=e^{ax}-\sqrt{x}$有两个零点,即方程$e^{ax}=\sqrt{x}$在$(0,+\infty)$上有两个解,两边取对数得到$a=\frac{\ln x}{2x}$,

【难点】通过函数零点与方程根的转化,方程两边取对数分离出参数a.

令$h(x)=\frac{\ln x}{2x}$,$h'(x)=\frac{1-\ln x}{2x^2}$,当$0<x<e$,$h'(x)>0$,$h(x)$在$(0,e)$单调递增,当$x>e$,$h'(x)<0$,$h(x)$在$(e,+\infty)$单调递减,故$h(x)$在$x=e$处有极大值$h(e)=\frac{1}{2e}$. 又当$x\to0^+$时,$h(x)\to-\infty$,当$x\to+\infty$时,$h(x)\to0$. 因为方程$a=\frac{\ln x}{2x}$有两个解,所以正数$a$的取值范围是$(0,\frac{1}{2e})$.

解法二

审题指导



【解题思路】显然$f(0)=1$,$f(x)=e^{ax}-\sqrt{x}$有两个零点,即方程$e^{ax}=\sqrt{x}$,$e^{2ax}=x$在$(0,+\infty)$上有两个解,两边取对数得到$2ax=\ln x$,令$g(x)=\ln x-2ax$,$g'(x)=\frac{1}{x}-2a$,$g(x)$在$(0,\frac{1}{2a})$单调递增,在$(\frac{1}{2a},+\infty)$单调递减,又当$x\to0^+$时,$g(x)\to-\infty$,当$x\to+\infty$时,$g(x)\to-\infty$,因为$g(x)$有两个零点,则$g(\frac{1}{2a})=\ln\frac{1}{2a}-1>0$,解得$a<\frac{1}{2e}$. 所以正数$a$的取值范围是$(0,\frac{1}{2e})$.

9. ABC 【命题立意】本题考查统计图表分析,考查数据处理能力、应用意识及统计与概率思想.

【解题思路】逐项分析如下:

选项	正误	原因
A	√	由折线图知 13 支乐队评分的极差为$10-3=7$
B	√	由折线图知 13 支乐队中,不低于 7 分的【易错】容易忽略不低于 7 分是包含 7 分的. 有 6 支
C	√	13 支乐队评分的平均数为$\frac{1}{13}\times(10+6+7+5+3+10+9+4+8+6+5+4+7)\approx6.46$
D	×	由折线图知第 9 支乐队的评分高于第 8 支乐队的评分,从而第 6 支到第 12 支乐队的评分不是逐渐降低的

10. BCD 【命题立意】本题考查三角函数的图象与性质,考查运算求解能力及数形结合思想.

【解题思路】

A 项:因为函数$f(x)$的图象的相邻两条对称轴间的距离为2π,得周期为4π,所以$\omega=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$,A 错误;

【易错】容易忽略相邻两条对称轴之间的距离为周期的一半,而非整个周期

B 项:因为$f(0)=1$,所以$\cos\varphi=\frac{1}{2}$,因为$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以函数$f(x)=2\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$,令$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$得$x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

【易错】容易混淆正弦函数的对称轴方程($x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$)和余弦函数的对称轴方程($x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$)

令$k=0$,得函数$f(x)$图象的一条对称轴为$x=-\frac{2\pi}{3}$,B 正确;

快解 因为$f(-\frac{2\pi}{3})=2\cos0=2$,所以$x=-\frac{2\pi}{3}$是函数$f(x)$图象的一条对称轴,B 正确;

C 项:令$2k\pi\leq\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\leq2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$,得$4k\pi-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq4k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,即函数$f(x)$的单调递减区间为$[4k\pi-\frac{2\pi}{3},4k\pi+\frac{4\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$,C 正确;

D 项:令$2\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})\geq1$,得$\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})\geq\frac{1}{2}$,所以$2k\pi-\frac{\pi}{3}\leq\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\leq2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,解得$4k\pi-\frac{4\pi}{3}\leq x\leq4k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以函数$f(x)\geq1$的解集为$[4k\pi-\frac{4\pi}{3},4k\pi](k\in\mathbf{Z})$,D 正确.

11. AD 【命题立意】本题考查指对幂运算及大小比较,考查运算求解能力、推理论证能力及特殊与一般思想.

【解题思路】逐项分析如下：

选项	正误	原因
A	√	$4^x-4^y<5^{-x}-5^{-y}$可化为$4^x-5^{-x}<4^y-5^{-y}$，令$f(x)=4^x-5^{-x}$，则$f(x)<f(y)$，根据指数函数的性质，可得$y=4^x$单调递增，$y=5^{-x}$单调递减，因此$f(x)=4^x-5^{-x}$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以$x<y$
B	×	由A项得$x<y$，当$x=-2$，$y=-1$时，$(-1)^{-3}=-1$，$(-2)^{-3}=-\frac{1}{8}$，此时$y^{-3}<x^{-3}$
C	×	由A项得$x<y$，当$y=1$，$x=0$时，$\lg(y-x)=0$
D	√	因为$y=3^{-x}=(\frac{1}{3})^x$在$\mathbf{R}$上是减函数，由$x<y$可得$(\frac{1}{3})^x>(\frac{1}{3})^y$，即$(\frac{1}{3})^y<3^{-x}$

12. BD 【命题立意】本题考查圆锥曲线综合，考查推理论证能力、运算求解能力及数形结合思想.

【解题思路】

A项：由已知得$C_2(b,a)$，代入双曲线得$\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}=1$，当$a=b$时方程不成立，故圆$C_2$的圆心不在双曲线$C_1$上，A错误；

B项：因为双曲线C_1的焦距为$2c=4$，所以$a^2+b^2=4$，所以$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}=2$，当且仅当$a=b=\sqrt{2}$时取等号，B正确；

C项：由已知可得双曲线C_1的顶点与圆C_2的圆心构成的三角形的面积为$\frac{1}{2}\times2a\times a=a^2$，C错误；

D项：双曲线C_1的渐近线与圆C_2相切，由对称性取双曲线C_1的渐近线方程$bx-ay=0$，则$\frac{|b^2-a^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=ab$，因为$a^2+b^2=c^2$，所以$|b^2-a^2|=abc$①，由圆$C_2$与$x$轴相切可得$a=ab$②，

即$b=1$，联立①②，得$c^2-2a^2=ac$或$c^2-2a^2=-ac$，若$c^2-2a^2=ac$，则$e^2-2=e$，解得$e=2$或$e=-1$（舍），若$c^2-2a^2=-ac$，则$e^2+e-2=0$，解得$e=-2$（舍）或$e=1$（舍），所以双曲线C_1的离心率$e=2$，D正确.

13. 10 【命题立意】本题考查等差数列，考查运算求解能力及函数与方程思想.

【解题思路】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$a_4=-a_8$，$a_3-a_5=4$，所以$\begin{cases}a_1+3d=-a_1-7d\\(a_1+2d)-(a_1+4d)=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=10\\d=-2\end{cases}$，所以$a_1=10$.

14. $\frac{4}{9}$ 【命题立意】本题考查二项分布，考查运算求解能力及统计与概率思想.

【解题思路】由题意随机变量$X\sim B(n,\frac{1}{n})$，即X服从二项分布，可得$P(X=n)=C_n^n\cdot(\frac{1}{n})^n\cdot(1-\frac{1}{n})^0=\frac{1}{27}$，所以$n^n=27$，所以$n=3$，$P(X=1)=C_3^1\cdot(\frac{1}{3})^1\cdot(1-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$.

15. 4 【命题立意】本题考查抛物线，考查运算求解能力及数形结合思想.

【解题思路】因为直线l的倾斜角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以直线l的斜率为1，由直线在x轴上的截距为-2，可得直线l的方程为$y=x+2$，联立$\begin{cases}x^2=2py\\y=x+2\end{cases}$，消去$y$整理得$x^2-2px-4p=0$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由韦达定理得$x_1+x_2=2p$，$x_1x_2=-4p$.

所以$|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2p)^2-4\times(-4p)}=16$，解得$p=-8$或$p=4$，又因为$p>0$，所以$p=4$.

$\frac{8}{\pi+2}$ cm；$\frac{128\pi}{(\pi+2)^2}$ cm³ 【命题立意】本题考查几何体的体积求解，考查空间想象能力、运算求解能力及函数与方程思想.

审题指导

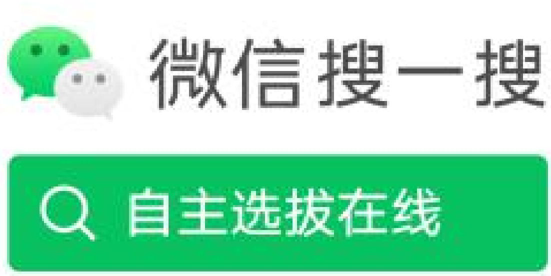
【解题思路】设圆柱的底面半径为r，圆柱的高为h. 则由题意可得$\pi r+2h+2r=12$. 所以$h=\frac{12-(2+\pi)r}{2}=6-\frac{2+\pi}{2}r$. 由$h>0$，得$r<\frac{12}{2+\pi}$. 故容器的容积$V=\pi r^2h=\pi r^2(6-\frac{2+\pi}{2}r)=6\pi r^2-\frac{\pi(2+\pi)}{2}r^3(0<r<\frac{12}{2+\pi})$，$V'=12\pi r-\frac{3\pi(2+\pi)}{2}r^2$. 令$V'=0$，解得$r=0$（舍）或$r=\frac{8}{\pi+2}$.

显然当$r\in(0,\frac{8}{\pi+2})$时，$V'>0$，函数单调递增；当$r\in(\frac{8}{\pi+2},\frac{12}{2+\pi})$时，$V'<0$，函数单调递减. 所以当$r=\frac{8}{\pi+2}$ cm时，V取得最大值，此时$h=6-\frac{2+\pi}{2}\times\frac{8}{\pi+2}=2$ cm，$V=\pi(\frac{8}{\pi+2})^2\times2=\frac{128\pi}{(\pi+2)^2}$ cm³.

关于我们

政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》