厦门市2023届高三毕业班第二次质量检测

数学试题

满分150分　考试时间120分钟

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上. 考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"准考证号、姓名、考试科目"与考生本人准考证号、姓名是否一致.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将答题卡交回.

一、单选题: 本题共8小题,每小题5分,共40分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点分别为 $(1,2)$,$(0,-1)$,则 $z_1z_2=$

A. $1+i$　　B. $2-i$　　C. $-2i$　　D. $-2-i$

2. $(ax+y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 项的系数等于80,则实数 $a=$

A. 2　　B. ± 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\pm 2\sqrt{2}$

3. 不等式 $ax^2-2x+1>0(a\in\mathbf{R})$ 恒成立的一个充分不必要条件是

A. $a\geq 1$　　B. $a>1$　　C. $0<a<\frac{1}{2}$　　D. $a>2$

4. 西施壶是紫砂壶器众多款式中最经典的壶型之一,是一款非常实用的泡茶工具(如图1). 西施壶的壶身可近似看成一个球体截去上下两个相同的球缺的几何体. 球缺的体积 $V=\frac{\pi(3R-h)h^2}{3}$(R 为球缺所在球的半径,h 为球缺的高). 若一个西施壶的壶身高为8 cm,壶口直径为6 cm(如图2),则该壶壶身的容积约为(不考虑壶壁厚度,π 取3.14)

图1

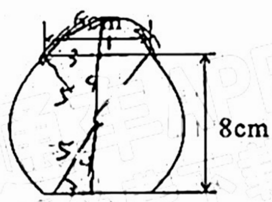


图2

第4题图

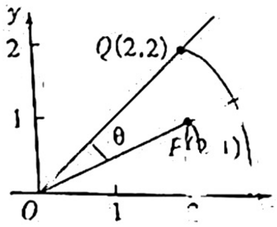
R=5.

A. 494 ml　　B. 506 ml　　C. 509 ml　　D. 516 ml

5. 厦门山海健康步道云海线全长约23公里,起于东渡邮轮广场,终于观音山沙滩,沿线串联贺笃湖、狐尾山、仙岳山、园山、薛岭山、虎头山、金山、湖边水库、五缘湾、虎仔山、观音山等"八山三水". 市民甲计划从"八山三水"这11个景点中随机选取相邻的3个游览,则选取的景点中有"水"的概率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{5}{9}$　　D. $\frac{109}{165}$

6. 如图，$\cos(\theta+\frac{3\pi}{4})=$



第6题图

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. 圆 O 为锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆，$AC=2AB=2$，点 P 在圆 O 上，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AO}$ 的取值范围为

A. $[-\frac{1}{2},4)$　　B. $[0,2)$　　C. $[-\frac{1}{2},2)$　　D. $[0,4)$

8. 已知 $a=\frac{9-e}{3+e}$，$b=\ln 3$，$c=2\ln 2-\frac{2}{7}$，则

A. $c>b>a$　　B. $a>b>c$　　C. $c>a>b$　　D. $b>a>c$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分．

9. 李明每天7:00从家里出发去学校，有时坐公交车，有时骑自行车．他各记录了50次坐公交车和骑自行车所花的时间，经数据分析得到：坐公交车平均用时30分钟，样本方差为36；骑自行车平均用时34分钟，样本方差为4．假设坐公交车用时 X 和骑自行车用时 Y 都服从正态分布，则

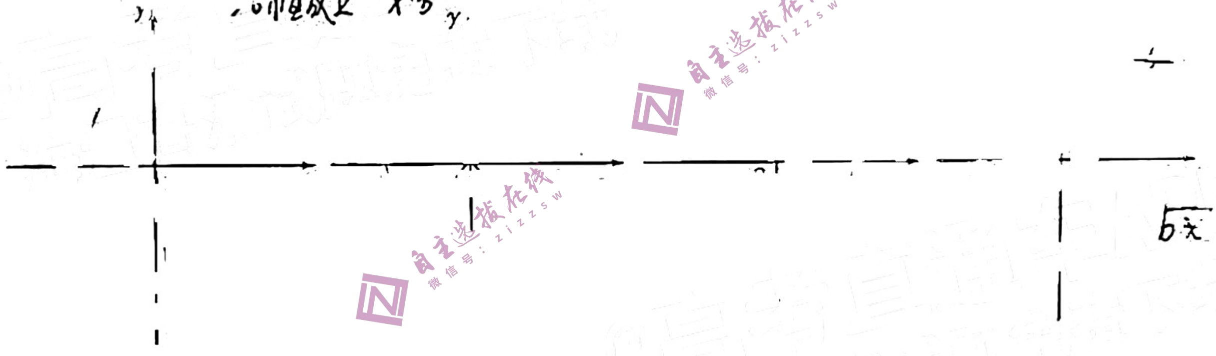
A. $P(X>32)>P(Y>32)$

B. $P(X\leqslant 36)=P(Y\leqslant 36)$

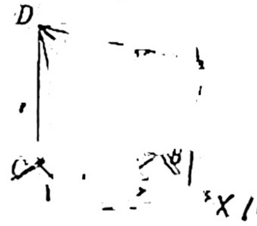
C. 李明计划7:34前到校，应选择坐公交车

D. 李明计划7:40前到校，应选择骑自行车

10. 函数 $f(x)=b(x-a)^2(x-b)$ 的图象可以是



11. 如图的六面体中，$CA=CB=CD=1$，$AB=BD=AD=AE=BE=DE=\sqrt{2}$，则



第11题图

A. $CD\perp$ 平面 ABC　　B. AC 与 BE 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$

C. $CE=\sqrt{3}$　　D. 该六面体外接球的表面积为 3π

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=f(2+x)+4x$，函数 $f(2x+1)$ 的图象关于 $(0,2)$ 对称，则

A. $f(x)$ 的图象关于 $(1,2)$ 对称　　B. 4是 $f(x)$ 的一个周期

C. $f(2)=4$　　D. $f(2023)=-4042$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 将函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 是奇函数，则 $\varphi=$ ▲ .

14. 写出与直线 $x=1$，$y=1$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 都相切的一个圆的方程 ▲ .

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，$a_1=2$. 若 $T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$，则 $T_{10}=$ ▲

16. 不与 x 轴重合的直线 l 过点 $N(x_N,0)(x_N\neq0)$，双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上存在两点 A，B 关于 l 对称，AB 中点 M 的横坐标为 x_M. 若 $x_N=4x_M$，则 C 的离心率为 ▲ .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $2a-c=2b\cos C$.

（1）求 B；

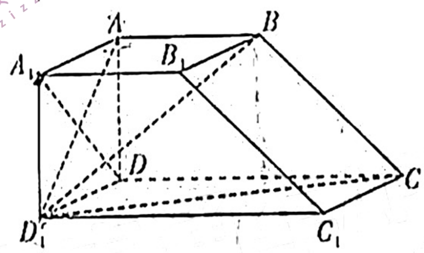
（2）A 的角平分线与 C 的角平分线相交于点 D，$AD=3$，$CD=5$，求 AC 和 BD.

18.（12 分）

如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\perp AD$，$A_1D\perp BD_1$.

（1）证明：四边形 ADD_1A_1 为正方形；

（2）若直线 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，$CD=2AB$，求平面 ABD_1 与平面 BCD_1 的夹角的大小.



第 18 题图

19.（12 分）

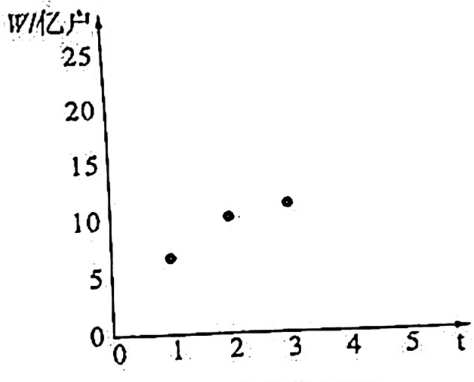
记等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n；等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 T_n. 已知 $b_3=4a_1$，$S_4=b_3+6$，$T_3=7a_1$.

（1）求 d 和 q；

（2）若 $a_1=1$，$q>0$，$c_n=\begin{cases}-a_nb_{n+1}, & n\text{ 为奇数},\\ [illegible] & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 求 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

20.(12分)

移动物联网广泛应用于生产制造、公共服务、个人消费等领域. 截至2022年底,我国移动物联网连接数达18.45亿户,成为全球主要经济体中首个实现“物超人”的国家. 右图是2018－2022年移动物联网连接数 W 与年份代码 t 的散点图,其中年份2018－2022对应的 t 分别为1－5.



第20题图

(1)根据散点图推断两个变量是否线性相关,计算样本相关系数(精确到0.01),并推断它们的相关程度;

(2)(i)假设变量 x 与变量 Y 的 n 对观测数据为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),…,(x_n,y_n),两个变量满足一元线性回归模型 $\begin{cases}Y=bx+e,\\E(e)=0,D(e)=\sigma^2,\end{cases}$(随机误差 $e_i=y_i-bx_i$). 请推导:当随机误差平方和 $Q=\sum\limits_i e_i^2$ 取得最小值时,参数 b 的最小二乘估计.

(ii)令变量 $x=t-\bar{t}$,$y=w-\bar{w}$,则变量 x 与变量 Y 满足一元线性回归模型 $\begin{cases}Y=bx+e,\\E(e)=0,D(e)=\sigma^2.\end{cases}$ 利用(i)中结论求 y 关于 x 的经验回归方程,并预测2024年移动物联网连接数.

附:样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(w_i-\bar{w})^2}}$,

$\sum\limits_{i=1}^{5}(w_i-\bar{w})^2=76.9$,$\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})=27.2$,$\sum\limits_{i=1}^{5}w_i=60.8$,$\sqrt{769}\approx27.7$.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=ae^x-x-a(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)证明:对任意 $a\in(0,1)$,存在正数 b 使得 $ae^b=a+b$,且 $2\ln a+b<0$.

22.(12分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$,左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_1 的直线 l 交 C 于 A,B 两点. 当 $l\perp x$ 轴时,$\triangle ABF_2$ 的面积为3.

(1)求 C 的方程;

(2)是否存在定圆 E,使其与以 AB 为直径的圆内切?若存在,求出所有满足条件的圆 E 的方程;若不存在,请说明理由.