济宁市 2023 年高考模拟考试

数学试题参考答案及评分标准

一、单选题：每小题 5 分，共 40 分.

1. C 2. D 3. B 4. B 5. B 6. A 7. D 8. A

8. 解：因为 $f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$f(\frac{n+1}{2})=\sqrt{3}\times f(\frac{n}{2})(n\in \mathbf{N}^*)$

所以 $f(\frac{n}{2})=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}^{n-1}=\sqrt{3}^{n-2}$，则 $f(n)=\sqrt{3}^{2n-2}=3^{n-1}$.

$a_n=\log_3 f(n)=\log_3 3^{n-1}=n-1$.

所以 $\frac{a_1}{2023}+\frac{a_{2024}}{2023}=\frac{a_2}{2023}+\frac{a_{2023}}{2023}=\cdots=\frac{a_{1012}}{2023}+\frac{a_{1013}}{2023}=1$

由 $g(x)=2x^3-3x^2+2$ 得：$g(x)+g(1-x)=2x^3-3x^2+2+2(1-x)^3-3(1-x)^2+2=3$.

所以 $g(\frac{a_1}{2023})+g(\frac{a_2}{2023})+g(\frac{a_3}{2023})+\cdots+g(\frac{a_{2024}}{2023})=1012\times 3=3036$.

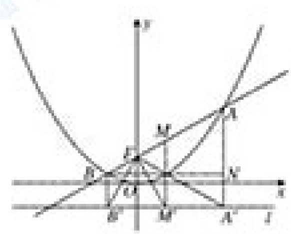
故选 A.

二、多选题：每小题 5 分，共 20 分. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. AC 10. ABD 11. ACD 12. BCD

12. 解析：F 的坐标为$(0,1)$，故 A 错.

过点 B 作 BN 垂直于 AA'，N 为垂足，如图所示(点 A 在第一象限时)



设 $|AF|=3|BF|=3m$ 则 $AN=2m$

所以 $\angle ABN=\frac{\pi}{6}$，直线 AB 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$

同理(点 A 在第二象限时)：直线 AB 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$

故 D 正确.

由题意可知：$\angle BFB'=\angle BB'F=\angle B'FO$，$\angle AFA'=\angle AA'F=\angle A'FO$.

所以$\angle A'FB'=\frac{\pi}{2}$. 故 B 正确.

因为$\angle ABN=\frac{\pi}{6}$

所以$|M'F|=\frac{1}{2}|B'A'|=\frac{1}{2}|BN|=\sqrt{3}m$

又因为$|MF|=m$，$|MM'|=\frac{|AA'|+|BB'|}{2}=2m$

所以 $MF\perp M'F$，即：$AF\perp M'F$

又因为 $AA'\perp A'M'$

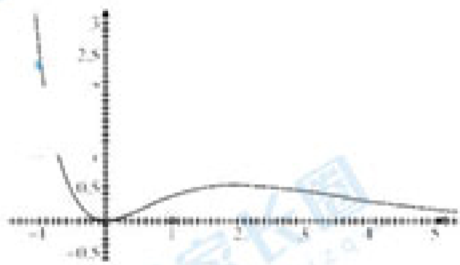
所以 A、A'、M'、F 四点共圆，故 C 正确.

所以选 BCD.

三、填空题：每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{1}{5}$　14. $\frac{\sqrt{30}}{6}$　15. $-\frac{2}{9}$　16. $[\frac{19}{2e^3},\frac{4}{e^2})$

16. 解：因为 $xe^y+y^2-ae^y=0$，所以$\frac{y^2}{e^y}=a-x$



又当 $x\in[0,\frac{1}{2e^3}]$时，$a-$.

令 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$，所以 $f'(x)=\frac{x(x-2)}{e^x}$，

所以 $f(x)$在$(-1,0)$上单减，在$(0,2)$上单增，在$(2,3)$上单减.

如图为函数 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$在$[-1,3]$上的图象，

又 $f(-1)=e$，$f(0)=0$，$f(2)=\frac{4}{e^2}$，$f(3)=\frac{9}{e^3}$.

所以要使 $y=t$ 与 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$有三个交点，需使 $t\in[\frac{9}{e^3},\frac{4}{e^2})$，

又对任意的 $x\in[0,\frac{1}{2e^3}]$，总存在三个不同的 $y\in[-1,3]$，使得方程 $xe^y+y^2-ae^y=0$ 成立，

所以$[a-\frac{1}{2e^2},a]\subseteq[\frac{9}{e^2},\frac{4}{e^2})$，所以$\begin{cases}a-\frac{1}{2e^2}\geq\frac{9}{e^2}\\a<\frac{4}{e^2}\end{cases}$，解得：$\frac{19}{2e^2}\leq a<\frac{4}{e^2}$

所以 a 的取值范围是$[\frac{19}{2e^2},\frac{4}{e^2})$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17.（1）解：由$\frac{2b-c}{\cos(A+B)}=\frac{a}{\cos(B+C)}$得：$\frac{2b-c}{\cos C}=\frac{a}{\cos A}$ ………………………… 1 分

即：$(2\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$ ………………………… 2 分

化简得：$2\sin B\cos A=\sin B$ ………………………… 3 分

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$ ………………………… 4 分

所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 5 分

（2）$b+c=\frac{a}{\sin A}(\sin B+\sin C)=4\sqrt{3}[\sin B+\sin(\frac{2\pi}{3}-B)]$

$=4\sqrt{3}(\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)=12\sin(B+\frac{\pi}{6})$. ………………………… 6 分

因为△ABC 为锐角三角 ………………………… 7 分

所以 $B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，$B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ ………………………… 8 分

所以 $\sin(B+\frac{\pi}{6})\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，$12\sin(B+\frac{\pi}{6})\in(6\sqrt{3},12]$. ………………………… 9 分

所以 $b+c$ 的取值范围为$(6\sqrt{3},12]$ ………………………… 10 分

18. 解：当 $n=1$ 时，$a_2=S_1+4=8$ ………………………… 1 分

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_{n-1}+4$

因为 $a_{n+1}=S_n+4$ ………………………… 3 分

所以 $a_{n+1}-a_n=a_n$，即：$a_{n+1}=2a_n$ ………………………… 4 分

又因为$\frac{a_2}{a_1}=\frac{8}{4}=2$，满足上式 ………………………… 5 分

所以 $a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$ ………………………………………………………………… 6 分

(2)$b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n\log_2 a_n}=(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1})$ ………………… 7 分

当 n 为奇数时，$T_n=(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2})-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1})=1+\dfrac{1}{n+1}$； ………… 9 分

当 n 为偶数时，$T_n=(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2})-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})+\cdots-(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1})=1-\dfrac{1}{n+1}$． ……… 11 分

综上所述：$T_n=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+1}, n\text{ 为奇数}\\ 1-\dfrac{1}{n+1}, n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 或 $T_n=1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$． ………………………… 12 分

19. 解：(1)在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC\perp BB_1$

因为 $AB\perp BC$，$BB_1\cap AB=B$　所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1 ………………………………… 2 分

因为 $BD=CE$，

所以 $DE/\!/BC$　所以 $DE\perp$ 平面 ABB_1A_1 ……………………………………………………… 3 分

因为 $BF\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $DE\perp BF$． ……………………………………………………………………………………… 4 分

(2)过点 E 作 $EG/\!/AC$ 交 AA_1 于点 G，连接 DG，易得平面 $DEG/\!/$ 平面 ABC，

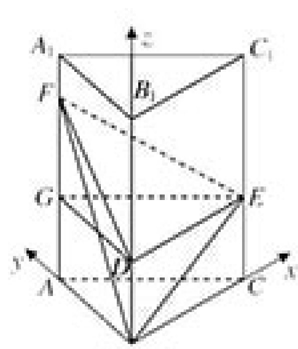
且 $DG\perp FG$，$FG=\sqrt{DF^2-}$[illegible] ………………………………… 7 分

由平面 DEF 将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积平分可知：

$V_{F-DEG}+V_{ABC-GDE}=\dfrac{1}{2}V_{ABC-A_1B_1C_1}$

即：$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times3\times3+\dfrac{1}{2}\times3\times3\times EC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times3\times3\times6$

解得：$EC=2$　所以 $AF=FG+GA=5$ ………………… 8 分



以点 B 为原点，BC、BA、BB_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系如图所示

则 $B(0,0,0)$，$E(3,0,2)$，$F(0,3,5)$，$D(0,0,2)$，

$\overrightarrow{BE}=(3,0,2)$，$\overrightarrow{BF}=(0,3,5)$，

$\overrightarrow{DE}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{DF}=(0,3,3)$， ………………………… 9 分

设平面 BEF 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}3x+2z=0\\ 3y+5z=0\end{cases}$

令 $x=2$，则 $z=-3$，$y=5$． 所以 $\vec{m}=(2,5,-3)$ ………………………………………… 10 分

同理可得平面 DEF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$ ……………………………………… 11 分

所以 $|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{4\sqrt{19}}{19}$．

所以二面角 $B-EF-D$ 的余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{19}}{19}$ ………………………………………… 12 分

20．解：(1)设"甲、乙恰好答对 2 个问题的概率"为事件 A，

则 $P(A)=P(X=1)\cdot P(Y=1)+P(X=2)\cdot P(Y=0)$ ………………………………… 2 分

$=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}\cdot C_3^1\,\dfrac{3}{5}\cdot(\dfrac{2}{5})^2+\dfrac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_5^3}\cdot C_3^0(\dfrac{3}{5})^0\cdot(\dfrac{2}{5})^3$ ……………………………… 4 分

$=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{36}{125}+\dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{8}{125}=\dfrac{78}{625}$

(2)由已知得：X 所有可能的取值为 1，2，3 ………………………………………… 5 分

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$，$P($ [illegible] $3)=\dfrac{C_3^3\cdot C_2^0}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{10}$

……………………………… 7 分

所以 $E(X)=1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{5}$

$D(X)=(1-\dfrac{9}{5})^2\times\dfrac{3}{10}+(2-\dfrac{9}{5})^2\times\dfrac{3}{5}+(3-\dfrac{9}{5})^2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{25}$ ……………………… 9 分

由已知得：$Y\sim B(3,\dfrac{3}{5})$，所以 $E(Y)=3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{5}$，$D(Y)=3\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{18}{25}$

因为 $D(X)<D(Y)$ ………………………………………………………………… 11 分

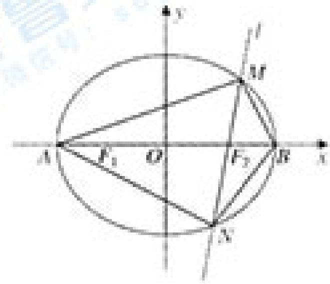
所以选择甲同学参赛 …………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为 4 可知：$c=2$.

由$\triangle F_1MN$的周长为 12 可知：$4a=12$，$a=3$. ………………………………………………………… 1 分

所以 $b^2=a^2-c^2=9-4=5$.

所以椭圆 E 的方程为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. ………………………… 3 分



设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

直线 l 的方程为：$x=my+2$.

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\\ x=my+2\end{cases}$ 得：$(5m^2+9)y^2+20my-25=0$.

所以 $y_1+y_2=\frac{-20m}{5m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-25}{5m^2+9}$. ………………………………………………………… 4 分

所以$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{-20m}{-25}=\frac{4m}{5}$，即：$my_1y_2=\frac{5}{4}(y_1+y_2)$. ………………………………………… 5 分

则$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1+3}}{\frac{y_2}{x_2-3}}=\frac{y_1(x_2-3)}{y_2(x_1+3)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+5y_2}=\frac{\frac{5}{4}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{5}{4}(y_1+y_2)+5y_2}=\frac{\frac{1}{4}(y_1+5y_2)}{\frac{5}{4}(y_1+5y_2)}=\frac{1}{5}$.

所以$\frac{k_1}{k_2}$为定值$\frac{1}{5}$. ………… ………………………………………… 7 分

(2)由题意可知：

$S_1+S_2=S_{\triangle MAB}+S_{\triangle NAB}=\frac{1}{2}\times2\times3\times|y_1-y_2|=3|y_1-y_2|$

$=3\frac{\sqrt{(20m)^2+4\times25\times(5m^2+9)}}{5m^2+9}=\frac{90\sqrt{m^2+1}}{5m^2+9}$………………………………………………………… 9 分

令 $t=\sqrt{m^2+1}\geqslant1$

则 $S_1+S_2=S_{\triangle MAB}+S_{\triangle NAB}=\frac{1}{2}\times2\times3\times|y_1-y_2|=3|y_1-y_2|$

$=\frac{90t}{5t^2+4}=\frac{90}{5t+\frac{4}{t}}$. ………………………………………………………………………………………… 10 分

又 $y=5t+\frac{4}{t}$在$[1,+\infty)$上单调递增.

所以当 $t=1$，即 $m=0$ 时，S_1+S_2 取得最大值为 $\dfrac{90}{5\times1+\dfrac{4}{1}}=10$. …………………… 11 分

所以 S_1+S_2 的最大值为 10. …………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2x-(a+2)=\dfrac{2x^2-(a+2)x+a}{x}=\dfrac{(2x-a)(x-1)}{x}$， ………… 1 分

由 $f'(x)=0$ 得：$x=\dfrac{a}{2}$ 或 $x=1$.

当 $\dfrac{a}{2}=1$ 即 $a=2$ 时，$f'(x)\geq0$ 恒成立，

函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； …………………………………………………………… 2 分

当 $\dfrac{a}{2}>1$ 即 $a>2$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$ 或 $x>\dfrac{a}{2}$；由 $f'(x)<0$ 得 $1<x<\dfrac{a}{2}$.

此时函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增；在 $(1,\dfrac{a}{2})$ 上单调递减； ………… 3 分

当 $\dfrac{a}{2}<1$ 即 $0<a<2$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\dfrac{a}{2}$ 或 $x>1$；由 $f'(x)<0$ 得 $\dfrac{a}{2}<x<1$.

此时函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a}{2})$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增；在 $(\dfrac{a}{2},1)$ 上单调递减. ………… 4 分

综上所述：当 $a=2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\dfrac{a}{2})$ 上单调递减；

当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a}{2})$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增；在 $(\dfrac{a}{2},1)$ 上单调递减. …… 5 分

(2) $g(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x-\dfrac{1}{2}x^2+(a+1)x=a\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-x$,

$g'(x)=\dfrac{a}{x}+x-1=\dfrac{x^2-x+a}{x}$ …………………………………………………………… 6 分

因为 $g(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2 $(0<x_1<x_2)$

则方程 $x^2-x+a=0$，$\Delta=1-4a>0$ 得：$0<a<\dfrac{1}{4}$，且 $x_1+x_2=1$，$x_1x_2=a$.

所以 $0<x_1<\sqrt{a}<\dfrac{1}{2}$. …………………………………………………………………… 8 分

所以 $g(x_1)-g(x_2)=a\ln x_1+\dfrac{1}{2}x_1^2-x_1-(a\ln x_2+\dfrac{1}{2}x_2^2-x_2)$

$=a\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-(x_1-x_2)$

$=a\ln\frac{x_1^2}{a}+\frac{1}{2}(2x_1-1)-(2x_1-1)$

$=a\ln\frac{x_1^2}{a}-\frac{1}{2}(2x_1-1)$

$=2a\ln x_1-a\ln a-\frac{1}{2}(2x_1-1)$ ………………………………………………………… 10 分

令 $h(x)=2a\ln x-a\ln a-\frac{1}{2}(2x-1),0<x<\sqrt{a}<\frac{1}{2}$.

$h'(x)=\frac{2a}{x}-1=\frac{2a-x}{x}$.

当 $0<x<2a$ 时，$h'(x)>0$；当 $2a<x<\sqrt{a}$时，$h'(x)<0$.

所以 $h(x)$在$(0,2a)$上单调递增，在$(2a,\sqrt{a})$上单调递减. ……………………………… 11 分

所以 $h(x)_{max}=h(2a)=2a\ln 2a-a\ln a-\frac{1}{2}(4a-1)$

$=a\ln 4a-2a+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$.

所以 $g(x_1)-g(x_2)<\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 12 分