高三第一次质量检测

数 学

座位号______ 考生号______ 姓名______

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{x|1<x<6\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$　　C. $\{2,3,4,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5,6\}$

2. 已知复数 z 满足 $(z-2i)(1-i)=2$，则 $\bar{z}=$

A. $2-3i$　　B. $1-3i$　　C. $2+3i$　　D. $1+3i$

3. 已知 a,b 是非零实数，则“$\ln|a|>\ln|b|$”是“$a^2>b^2$”的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 某社区为了丰富退休人员的业余文化生活，自 2018 年以来，始终坚持开展“悦读小屋读书活动”. 下表是对 2018 年以来近 5 年该社区退休人员的年人均借阅量的数据统计：

年份	2018	2019	2020	2021	2022
年份代码 x	1	2	3	4	5
年人均借阅量 y(册)	y_1	y_2	16	22	28

（参考数据：$\sum_{i=1}^{5}y_i=90$）通过分析散点图的特征后，年人均借阅量 y 关于年份代码 x 的回归分析模型为 $\hat{y}=5x+m$，则 2023 年的年人均借阅量约为

A. 31　　B. 32　　C. 33　　D. 34

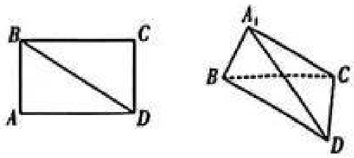
5. 抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经过抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出；反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，O 为坐标原点，一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P(m,n)(n^2<4m)$ 射入，经过抛物线上的点 $A(x_1,y_1)$ 反射后，再经抛物线上另一点 $B(x_2,y_2)$ 反射后，沿直线 l_2 射出，则直线 l_1 与 l_2 间的距离最小值为

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

6. 某校 4 名同学参加数学和物理两项竞赛，每项竞赛至少有 1 名同学参加，每名同学限报其中一项，则两项竞赛参加人数不相等的概率为

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{3}{7}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{4}{7}$

7. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，现将$\triangle ABD$ 沿 BD 折起成$\triangle A_1BD$，折起过程中，当 $A_1B\perp CD$ 时，四面体 A_1BCD 体积为



A. 2　　B. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$　　C. $3\sqrt{7}$　　D. $\frac{9\sqrt{7}}{2}$

8. 在三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$|\overrightarrow{BC}|=6$，$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$上的投影向量为$\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=$

A. -12　　B. -6　　C. 12　　D. 18

二、选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 已知函数 $f(x)=a\sin x+\cos x(x\in\mathbf{R})$的图象关于点$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$对称，则下列结论正确的是

A. $a=-\sqrt{3}$

B. $f(x)$的最大值为 2

C. 函数 $f(x)$的图象相邻两条对称轴之间的距离为 π

D. $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递减

10. 已知点 F_1，F_2 是双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$P$ 是双曲线 C 位于第一象限内一点，若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$|\overrightarrow{PF_1}|=2|\overrightarrow{PF_2}|$，则下列结论正确的是

A. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为$\frac{3}{2}a^2$

B. 双曲线 C 的离心率为$\sqrt{5}$

C. 双曲线 C 的渐近线方程为 $x\pm 2y=0$

D. 若双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{5}$，则双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$

11. 若数列$\{a_n\}$中任意连续三项 a_i，a_{i+1}，a_{i+2}，均满足$(a_i-a_{i+2})(a_{i+2}-a_{i+1})>0$，则称数列$\{a_n\}$为跳跃数列. 则下列结论正确的是

A. 等比数列：$1,-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots$是跳跃数列

B. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\cos\frac{n\pi}{2}(n\in N^*)$，数列$\{a_n\}$是跳跃数列

C. 等差数列不可能是跳跃数列

D. 等比数列是跳跃数列的充要条件是该等比数列的公比$q\in(-1,0)$

12. 已知函数$f(x)$的定义域为R，函数$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，且满足$f(x+3)=f(1-x)$，则下列结论正确的是

A. 函数$f(x+1)$是奇函数

B. 函数$f(x)$的图象关于y轴对称

C. 函数$f(x)$是最小正周期为2的周期函数

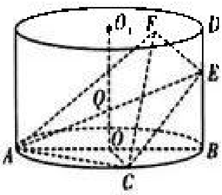
D. 若函数$g(x)$满足$g(x)+f(x+3)=2$，则$\sum\limits_{k=1}^{2024}g(k)=4048$

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分.）

13. 已知$\tan\theta=2$，则$\sin 2\theta=$__________.

14. 已知圆$A:x^2+(y-3)^2=1$，过动点P作圆A的切线PB（B为切点），使得$|PB|=\sqrt{3}$，则动点P的轨迹方程为__________.

15. 如图，圆柱OO_1的底面半径和母线长均为3，AB是底面直径，点C在圆O上且$OC\perp AB$，点E在母线BD上，$BE=2$，点F是上底面的一个动点，且$O_1F=\sqrt{6}$，则四面体$ACEF$的外接球的体积为__________.



16. 已知$x_1,x_2(x_1<x_2)$是函数$f(x)=8ae^x-4x^2-3$的两个不同极值点，若$f(x_1)=0$，则实数a的值为__________.

四、解答题（本大题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分10分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$b\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)-c\sin B=0$.

(1)求角C的值；

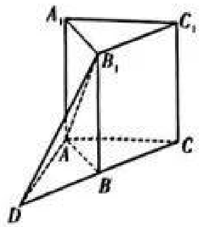
(2)若$\triangle ABC$的面积为$10\sqrt{3}$，D为AC的中点，求BD的最小值.

18.(本小题满分 12 分)

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB\perp BC$,$AB=BC=\sqrt{2}$,$AA_1=2$,延长 CB 至 D,使 $CB=BD$,连接 AD、AB_1、B_1D.

(1)求证:平面 $B_1AD\perp$ 平面 ACC_1A_1;

(2)求二面角 B_1-AD-C 的余弦值.



19.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且满足 $a_1=2$,$(n+2)S_n=na_{n+1}$,数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{S_n}{n}$.

(1)证明:$\{b_n\}$是等比数列;

(2)设 $c_n=\frac{n+2}{n\cdot a_n}$,数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 T_n,证明:$T_n<2$.

20.(本小题满分 12 分)

2023 年游泳世锦赛于 7 月 14 日—30 日在日本福冈进行,甲、乙两名 10 米跳台双人赛的选手,在备战世锦赛时挑战某高难度动作,每轮均挑战 3 次,每次挑战的结果只有成功和失败两种.

(1)甲在每次挑战中,成功的概率都为$\frac{2}{3}$.设甲在 3 次挑战中成功的次数为 X,求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(2)乙在第一次挑战时,成功的概率为 0.5,由于教练点拨、自我反思和心理调控等因素影响下,从第二次开始,每次成功的概率会发生改变,改变规律为:若前一次成功,则该次成功的概率比前一次成功的概率增加 0.2;若前一次失败,则该次成功的概率比前一次成功的概率增加 0.15.求乙在第三次成功的概率.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，P 是椭圆 C 上一动点，$|PF_1|+|PF_2|=4$，椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，直线 l 过点 $Q(-3,0)$ 交椭圆 C 于不同的两点 A，B.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若三角形 F_1AB 的面积为 $\frac{\sqrt{21}}{4}$，求直线 l 的方程.

22.（本小题满分 12 分）

(1)证明：当 $x>1$ 时，$e^x>x^2$；

(2)当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，证明函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}+a(\ln x-x)$ 有 2 个不同零点.

高三第一次质量检测

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	C	B	D	B	A	BC	BD	ACD	ABD

一、选择题(本大题共**8**小题,每小题**5**分,共**40**分.)

1. C 【解析】由题意 $A\cap B=\{2,3,4,5\}$,故选 C.

2. B 【解析】由 $(z-2i)(1-i)=2$ 可得 $z=\frac{2}{1-i}+2i=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}+2i=1+i+2i=1+3i$,
所以 $\bar{z}=1-3i$,故选 B.

3. A 【解析】因为 a,b 都是非零实数,由 $\ln|a|>\ln|b|$ 可得 $|a|>|b|$,所以 $a^2>b^2$ 成立,反之也成立.
所以“$\ln|a|>\ln|b|$”是“$a^2>b^2$”的充分必要条件,故选 A.

4. C 【解析】因为 $\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,$\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}=\frac{90}{5}=18$,所以 $18=5\times3+m$,即 $m=3$.
所以回归方程为 $\hat{y}=5x+3$,当 $x=6$ 时,$\hat{y}=5\times6+3=33$,故选 C.

5. B 【解析】由抛物线的光学性质可知,直线 AB 过抛物线的焦点 $F(1,0)$,设直线 AB 的方程为 $x=ty+1$,将直线 AB 的方程代入 $y^2=4x$ 中,得 $y^2-4ty-4=0$,所以 $y_1+y_2=4t$,$y_1y_2=-4$,直线 l_1 与 l_2 间的距离 $d=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{16t^2+16}\geqslant4$,当 $t=0$ 时,d 取最小值 4,故选 B.

6. D 【解析】记“两项竞赛参加人数不相等”为事件 A,则 $P(A)=1-\frac{C_4^2C_2^2}{2^4-2}=\frac{4}{7}$,故选 D.

7. B 【解析】由 $A_1B\perp A_1D$ 及 $A_1B\perp CD$,故 $A_1B\perp$ 平面 A_1CD,所以 $A_1B\perp A_1C$,即此时 $\triangle A_1BC$ 为直角三角形,又由 $A_1B\perp CD$ 及 $BC\perp CD$,于是 $CD\perp$ 平面 A_1BC,所以此时四面体 A_1BCD 的体积为 $\frac{1}{3}\times3\times\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{7}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$.故选 B.

8. A 【解析】由题意,$\angle BAC=90°$,O 为 BC 中点,由 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $|\overrightarrow{BA}|\cos B\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$,
即 $\frac{|\overrightarrow{BA}|\cos B}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{5}{6}$,又 $|\overrightarrow{BC}|=6$,所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos B=\frac{5}{6}|\overrightarrow{BC}|^2=30$,
所以 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times6-30=-12$.故选 A.

二、选择题(本大题共**4**小题,每小题**5**分,共**20**分.)

9. BC 【解析】因为函数 $f(x)=a\sin x+\cos x(x\in\mathbf{R})$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ 对称,
所以 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=a\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$,解得 $a=\sqrt{3}$,故 A 错误;
由 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,得 $f(x)$ 最大值为 2,故 B 正确;
因为 $f(x)$ 的最小正周期为 2π,所以函数 $f(x)$ 的图象相邻两条对称轴的距离为 π,故 C 正确;
当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 时,$x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上是单调递增,故 D 错误.故选 BC.

10. BD 【解析】由定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$,因为 $|PF_1|=2|PF_2|$,所以 $|PF_1|=4a$,$|PF_2|=2a$,
由已知 $\angle F_1PF_2=90°$,所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=\frac{1}{2}\times4a\times2a=4a^2$,故 A 错误;
由勾股定理得 $(2a)^2+(4a)^2=(2c)^2$,即 $5a^2=c^2$,所以 $e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{5}$,故 B 正确;
因为 $b^2=c^2-a^2=4a^2$,所以 $\frac{b^2}{a^2}=4$,即 $\frac{b}{a}=2$,所以双曲线的渐近线方程为:$2x\pm y=0$,故 C 错误;
由双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{5}$ 得 $c=\sqrt{5}$,从而 $a^2=1$,$b^2=4$,所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$,故 D 正确.故选 BD.

11. ACD 【解析】选项 A,由跳跃数列定义知,等比数列:$1,-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots$ 是跳跃数列,故 A 正确;
选项 B,数列的前三项为 $a_1=0$,$a_2=-1$,$a_3=0$,不符合跳跃数列的定义,故 B 错误;
选项 C,当等差数列公差 $d>0$ 时,它是单调递增数列;公差 $d<0$ 时,它是单调递减数列;
公差 $d=0$ 时,它是常数列,所以等差数列不可能是跳跃数列,故 C 正确;
选项 D,等比数列 $\{a_n\}$ 是跳跃数列,则 $(a_i-a_{i+2})(a_{i+2}-a_{i+1})=a_i^2(1-q^2)(q^2-q)>0$,整理得 $(q+1)q(q-1)^2<0$,即 $-1<q<0$,故 D 正确.故选 ACD.

12. ABD 【解析】因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,所以 $f(x+1)=-f(1-x)$,所以函数 $f(x+1)$ 是奇函数,故 A 正确;

因为 $f(x+1)=-f(1-x)$，所以 $f(x+2)=-f(-x)$，又 $f(x+3)=f(1-x)$，所以 $f(x+3)=-f(x+1)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数. 故 B 正确；

因为 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是最小正周期为 4 的周期函数，故 C 错误；

因为 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(1)+f(3)=0$，$f(0)+f(2)=0$，因为 $g(x)+f(x+3)=2$，所以 $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=2-f(3)+2-f(4)+2-f(5)+2-f(6)=8-[f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]=8-[f(3)+f(0)+f(1)+f(2)]=8$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{2024}g(k)=506[g(0)+g(1)+g(2)+g(3)]=4048$，故 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题（本大题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分.）

13. $\frac{4}{5}$ 【解析】$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{4}{5}$.

14. $x^2+(y-3)^2=4$ 【解析】设 $P(x,y)$，由 $|PB|=\sqrt{3}$ 得 $|PB|^2=3$，则 $x^2+(y-3)^2-1=3$，即 $x^2+(y-3)^2=4$. 所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+(y-3)^2=4$.

15. $\frac{40\sqrt{10}}{3}\pi$ 【解析】因为 F 是上底面的一个动点，且 $O_1F=\sqrt{6}$，所以点 F 的轨迹是上底面上以 O_1 为圆心，$\sqrt{6}$ 为半径的圆

在 $\triangle ACE$ 中，$AC=3\sqrt{2}$，$CE=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$，$AE=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}$，

$\therefore AC^2+CE^2=AE^2$，$\therefore \triangle ACE$ 为直角三角形，其外心为 AE 与 OO_1 的交点 Q，

且 $OQ=1$，$QE=\sqrt{10}$，而 $QF=\sqrt{QO_1^2+O_1F^2}=\sqrt{2^2+6}=\sqrt{10}$，

所以 $QF=QE=QC=QA$，所以 Q 为四面体 $ACEF$ 的外接球的球心，球半径为 $\sqrt{10}$，

所以球的体积为 $\frac{40\sqrt{10}}{3}\pi$.

16. $\frac{\sqrt{e}}{2e}$ 【解析】依题意知 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)=8ae^x-8x$，$x\in\mathbf{R}$，

$x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $f(x)=8ae^x-4x^2-3$ 的两个不同极值点，

所以 $f'(x_1)=8ae^{x_1}-8x_1=0$，$f'(x_2)=8ae^{x_2}-8x_2=0$，即 $ae^x-x=0$ 有两个不同实根，

等价于 $a=\frac{x}{e^x}$ 有两个根，令 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，令 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}=0$，解得 $x=1$，

所以 $x\in(-\infty,1)$ 时，$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$，

$g(x)$ 单调递减，所以 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$，又 x 趋向于正无穷大时，$g(x)$ 趋向于 0，所以 $0<a<\frac{1}{e}$ 且 $0<x_1<1<x_2$. 若 $f(x_1)=0$，即 $f(x_1)=8ae^{x_1}-4x_1^2-3=0$，

由 $\begin{cases}8ae^{x_1}-4x_1^2-3=0,\\ ae^{x_1}-x_1=0,\end{cases}$ 解得：$x_1=\frac{1}{2}$，$a=\frac{\sqrt{e}}{2e}$ 或 $x_1=\frac{3}{2}$，$a=\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}$（舍去），所以 $a=\frac{\sqrt{e}}{2e}$.

四、解答题（本大题共 **6** 小题，共 **70** 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. 【解析】(1) 由 $b\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)-c\sin B=0$ 及正弦定理可得：

$\sin B\left(\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)-\sin C\sin B=0$，则 $\sin B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin C\right)=0$，……………… 3 分

因为 $B,C\in(0,\pi)$，则 $\sin B>0$，所以，$\sqrt{3}\cos C=\sin C>0$，……………… 4 分

可得 $\tan C=\sqrt{3}$，故 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………… 5 分

(2) 由于 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$，所以，$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$，解得 $ab=40$. ……………… 7 分

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得：$BD^2=a^2+\frac{b^2}{4}-ab\cos C=a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2}ab\geq 2a\cdot\frac{b}{2}-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ab=20$，故 $BD\geq 2\sqrt{5}$，

当且仅当 $a=\frac{1}{2}b$，即 $a=2\sqrt{5}$，$b=4\sqrt{5}$ 时，BD 的最小值为 $2\sqrt{5}$. ……………… 10 分

18. 【解析】(1) 因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC，……………… 1 分

又由延长 CB 至 D，使 $CB=BD$，连接 AD，可知 AD 在平面 ABC 内，所以 $AA_1\perp AD$. ……………… 2 分

因为 $AB\perp BC$，$AB=BC$，所以 $\angle ABC=90^\circ$，$\angle BAC=45^\circ$，……………… 3 分

又由 $CB=BD$，所以，$\angle DAB=45^\circ$，……………… 4 分

所以 $\angle DAC=\angle DAB+\angle BAC=90^\circ$，即 $AD\perp AC$，……………… 5 分

又 $AC\cap AA_1=A$，所以 $AD\perp$ 平面 ACC_1A_1，因为 AD 在平面 B_1AD 内，

所以平面 $B_1AD\perp$ 平面 ACC_1A_1. ………………

(2)**法一**：由(1)可知 $AB=BD=\sqrt{2}$，取 AD 中点 E，连接 BE、B_1E，所以 $BE\perp AD$. ………………………………… 7 分

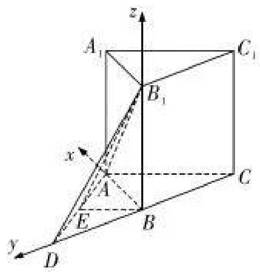
因为 $BB_1\perp$ 平面 ACD，易得 $B_1A=B_1D$，所以 $B_1E\perp AD$，所以$\angle BEB_1$ 为二面角 B_1-AD-C 的平面角， …… 9 分

因为 $AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=2$，所以 $BE=\frac{1}{2}AD=1$，$BB_1=2$，所以 $B_1E=\sqrt{BE^2+BB_1^2}=\sqrt{5}$， ……………………… 10 分

所以 $\cos\angle BEB_1=\frac{BE}{B_1E}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故二面角 B_1-AD-C 的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

法二：由已知可知 $BB_1\perp BA$，$BB_1\perp DC$，$BA\perp BC$，所以以点 B 为原点，BA，BD，BB_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系(如图所示)，……………………………………… 7 分



由 $AB=BC=\sqrt{2}$，$AA_1=2$，则 $A(\sqrt{2},0,0)$，$D(0,\sqrt{2},0)$，$B_1(0,0,2)$，

因为 $BB_1\perp$ 平面 ACD，所以平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,2)$，…………………… 8 分

由$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{2},0,2)$，设平面 ADB_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{m}=-\sqrt{2}x+2z=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\end{cases}$ ………………………………………………………… 9 分

即$\begin{cases}x=\sqrt{2}z,\\ x=y,\end{cases}$令 $z=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$. ……………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以二面角 B_1-AD-C 的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由题设$(n+2)S_n=na_{n+1}$，得$(n+2)S_n-n(S_{n+1}-S_n)=0$，即 $2(n+1)S_n=nS_{n+1}$，……………………… 2 分

所以$\frac{S_{n+1}}{n+1}=2\times\frac{S_n}{n}$，又 $b_n=\frac{S_n}{n}$，所以$\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$，而 $b_1=\frac{S_1}{1}=a_1=2$， ………………………………………………… 4 分

故$\{b_n\}$是首项与公比都为 2 的等比数列. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)$\frac{S_n}{n}=2\times2^{n-1}=2^n$，得 $S_n=n\cdot2^n$，………………………………………………………………………… 6 分

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n\cdot2^n-(n-1)\cdot2^{n-1}=(n+1)\cdot2^{n-1}$， ………………………………………… 7 分

显然 $a_1=2$ 满足上式，所以 $a_n=(n+1)\cdot2^{n-1}$， …………………………………………………………………… 8 分

则 $c_n=\frac{n+2}{n\cdot a_n}=\frac{n+2}{n(n+1)2^{n-1}}=2\left(\frac{1}{n\cdot2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot2^n}\right)$， ……………………………………………… 9 分

所以 $T_n=2\left(\frac{1}{1\times2^0}-\frac{1}{2\times2^1}+\frac{1}{2\times2^1}-\frac{1}{3\times2^2}+\cdots+\frac{1}{n\times2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)2^n}\right)=2-\frac{1}{(n+1)2^{n-1}}<2$，

故 $T_n<2$. ………………………………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意得，$X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，则 $P(X=k)=C_3^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-k}$，其中 $k=0,1,2,3$， ….. 1 分

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

…… 5 分

则 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$. ……………………………………………………………………………………… 6 分

(2)设事件 A_i 为“乙在第 i 次挑战成功”，其中 $i=1,2,3$.

所以 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)=0.5*0.7*0.9=0.315$；…………………………………… 7 分

$P(\overline{A_1}A_2A_3)=P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}A_2)=0.5*0.65*0.85=0.27625$； ……………………………… 8 分

$P(A_1\overline{A_2}A_3)=P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2})=0.5*0.3*0.85=0.1275$；………………………………… 9 分

$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})=0.5*0.35*0.8=0.14$； …………………………… 10 分

故 $P(A_3)=P(A_1A_2A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$

$=P(A_1A_2A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$

$=0.315+0.27625+0.1275+0.14=0.85875$.

即乙在第三次成功的概率为 0.85875. …………………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设椭圆 C 的半焦距为 c，由已知有$\begin{cases}2a=4,\\ e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$ ……………………………… 4 分

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $x=ty-3$,$t\neq0$, …… 6分

联立 $\begin{cases}x=ty-3,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 x,整理得 $(3t^2+4)y^2-18ty+15=0$, …… 7分

则 $y_1+y_2=\dfrac{18t}{3t^2+4}$,$y_1y_2=\dfrac{15}{3t^2+4}$, …… 8分

且 $\Delta=(18t)^2-4(3t^2+4)\times15>0$,即 $t<-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $t>\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. …… 9分

所以 $\triangle F_1AB$ 的面积为 $S_{\triangle F_1AB}=\dfrac{1}{2}|QF_1|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\left(\dfrac{18t}{3t^2+4}\right)^2-4\times\dfrac{15}{3t^2+4}}=$

$\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{3t^2-5}}{3t^2+4}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$, …… 10分

令 $\sqrt{3t^2-5}=n$,得 $\sqrt{7}n^2-16n+9\sqrt{7}=0$,

解得 $n=\sqrt{7}$ 或 $n=\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$,

从而 $t=\pm2$ 或 $t=\pm\sqrt{\dfrac{116}{21}}$. …… 11分

故直线 l 的方程为 $x=\pm2y-3$,或 $x=\pm\sqrt{\dfrac{116}{21}}y-3$,

即 $x\pm2y+3=0$,或 $21x\pm2\sqrt{609}y+63=0$. …… 12分

22.【解析】(1)令 $g(x)=e^x-x^2$,其中 $x>1$,则 $g'(x)=e^x-2x$, …… 1分

令 $\varphi(x)=e^x-2x$,$x>1$,则 $\varphi'(x)=e^x-2>0$, …… 2分

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g'(x)>e-2>0$,所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,$g(x)>e-1>0$,故当 $x>1$ 时,$e^x>x^2$. …… 4分

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}+a\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{1-x}{e^x}+a\cdot\dfrac{1-x}{x}=(1-x)\left(\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{a}{x}\right)$. …… 5分

因为 $a>0$,$\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{a}{x}>0$.令 $f'(x)>0$,得 $0<x<1$,令 $f'(x)<0$,得 $x>1$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 有最大值 $f(1)=\dfrac{1}{e}-a$.

…… 6分

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时,$f(1)>0$,$f(a)=\dfrac{a}{e^a}+a(\ln a-a)$,

令 $h(x)=\ln x-x+1$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$,则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(1)=0$,所以 $h(x)=\ln x-x+1\leqslant0$, …… 7分

因此当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时,$\ln a-a<-1$,$f(a)=\dfrac{a}{e^a}+a(\ln a-a)<\dfrac{a}{e^a}-a=a\left(\dfrac{1}{e^a}-1\right)$.

因为 $a>0$,所以 $e^a>1$,于是 $f(a)<a\left(\dfrac{1}{e^a}-1\right)<0$. …… 8分

又 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,$f(1)>0$,且 $0<a<\dfrac{1}{e}<1$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一零点. …… 9分

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}+a\left(\ln\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}-a\ln a-1$,

由(1)因为 $\dfrac{1}{a}>e>1$,所以 $e^{\frac{1}{a}}>\left(\dfrac{1}{a}\right)^2$,即 $\dfrac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}<a$, …… 10分

所以 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}-a\ln a-1<a-a\ln a-1$.

由 $\ln x-x+1\leqslant0$,得 $\ln\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}+1<0$,即 $-\ln a-\dfrac{1}{a}+1<0$,得 $a-a\ln a-1<0$,于是 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)<0$. …… 11分

又 $f(1)>0$,$\dfrac{1}{a}>1$,$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点.

故 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时,$f(x)$ 有两个零点. …… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。