

数 学

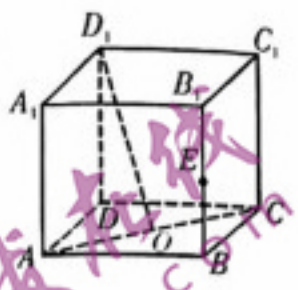
注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

1. 若复数 $z = (1+2i)(1-i)$ (i 为虚数单位),则复数 z 的模为
A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{2}$
2. 已知集合 $A = \{s | s = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | -3 < x < 4\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ B. $\{-2, -1, 0, 1, 3, 3\}$
C. $\{-3, -2, -1, 1, 3\}$ D. $\{-1, 1, 3\}$
3. 1707 年数学家欧拉发现了指数与对数的互逆关系:当 $a > 0, a \neq 1$ 时, $a^x = N$ 等价于 $x = \log_a N$. 若 $e^x = 128$ (e 是自然对数的底数), $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg e \approx 0.4343$, 则 x 的值约为
A. 4.1613 B. 4.8515 C. 5.5446 D. 6.2376
4. 若函数 $f(x) = (x+a)(x+2)^2$ 在 $x = -1$ 处有极小值,则实数 a 的值为
A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1
5. 将函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象,则“ $\varphi = \frac{3\pi}{8}$ ”是“函数 $g(x)$ 为偶函数”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 在“最强大脑”的双英对抗赛中,甲、乙两人同时挑战 100 秒记忆力项目,根据以往甲、乙两人同场对抗挑战该项目的记录统计分析,在对抗挑战中甲挑战成功的概率是 $\frac{4}{15}$,乙挑战成功的概率是 $\frac{2}{15}$,甲、乙均未挑战成功的概率是 $\frac{7}{10}$,则在甲挑战成功的条件下,乙挑战成功的概率为
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{7}{15}$

7. 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 O 为底面 $ABCD$ 的中心, 侧棱 BB_1 的中点为 E , 则三棱锥 D_1-OCE 的体积为



- A. 1
B. 2
C. $\frac{\sqrt{10}}{6}$
D. $\frac{\sqrt{15}}{6}$

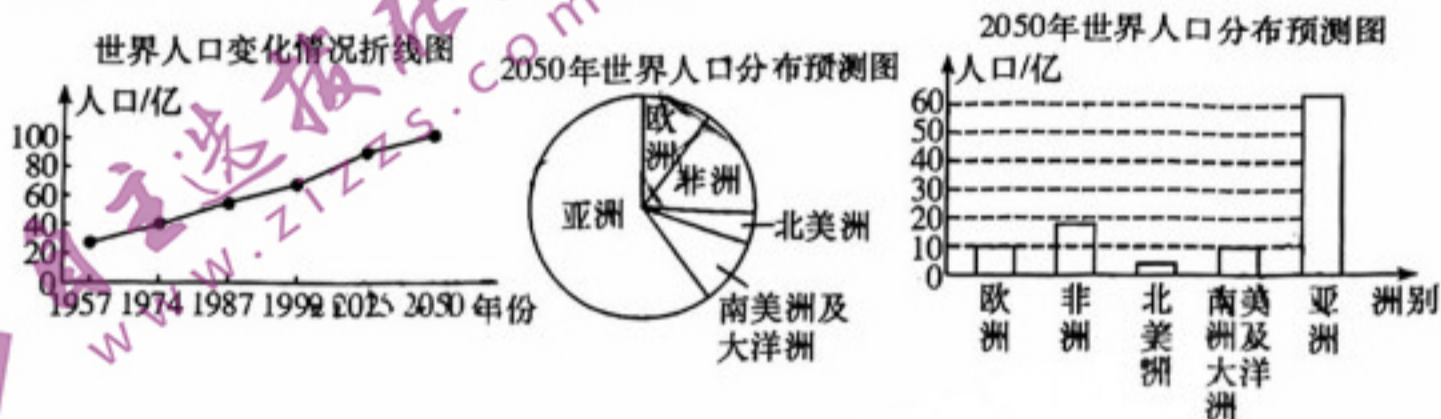
8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上不恒为零的函数, 对任意的 $x, y \in \mathbf{N}^*$ 均满足: $(x+y)f(x)f(y) =$

$xyf(x+y), f(1)=2$, 则 $\sum_{k=1}^{20} f(k) =$

- A. $2^{20} + 2$
B. $2^{21} - 2$
C. $19 \times 2^{20} + 2$
D. $19 \times 2^{21} + 2$

二、选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 如图所示是世界人口变化情况的三幅统计图:



则下列结论正确的是

- A. 从折线图能看出世界人口的总量随着年份的增加而增加
B. 2050 年亚洲人口将比其他各洲人口的总和还要多
C. 2050 年南美洲及大洋洲人口之和将与欧洲人口基本持平
D. 1957 年到 2050 年各洲中北美洲人口增长速度最慢
10. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 和 $C_2: x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}ax - 2ay - 5 = 0 (a > 0)$ 有且仅有一条公切线 l , 则下列结论正确的是
- A. 圆 C_1 与圆 C_2 内切
B. $a = 1$
C. 公切线 l 的方程为 $2x - 2\sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$
D. 公切线 l 的方程为 $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$
11. 设抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线 l 与 x 轴交于点 P , 过点 P 的直线与抛物线依次交于 A, B 两点(点 A 在 P, B 两点之间), FA 交 y 轴于点 M , FB 交准线 l 于点 N . 则下列结论正确的是
- A. 点 P 坐标为 $(-2, 0)$
B. 直线 FA, FB 关于 x 轴对称
C. $|FM| = 2|FN|$
D. $2|FM| = |FN|$
12. 已知 $m, n \in (0, +\infty)$, 且 $m + \ln m = \frac{1}{m} + e^{\frac{1}{m}}, n^2 e^n = -\ln n$, 则下列结论正确的是
- A. $m = e^n$
B. $n = e^m$
C. $mn < e^n$
D. $mn \geq e^n$

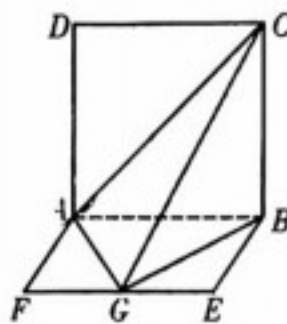
三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$, $\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\tan(\alpha - \beta) =$ _____.

14. 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 2$, 则向量 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 在向量 \mathbf{a} 上的投影向量为 _____.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线与双曲线在第二象限的交点为 A , 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, $|F_1A| = |F_1F_2|$, $\angle AF_2F_1 = 30^\circ$, 则双曲线 C 的离心率是 _____.

16. 如图, 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 矩形 $ABEF$ 的边 AF 的长为 2, 若 G 是边 EF 上的动点, 则三棱锥 $C-ABG$ 的外接球体积的最小值为 _____.



四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $2\sin A \sin(A + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\sqrt{2}a = \sqrt{3}b$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

已知递增等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, $a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 1 + (-1)^n a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

19. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 上、下顶点分别为 B_1, B_2 , 若四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 面积为 4, 椭圆 C 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

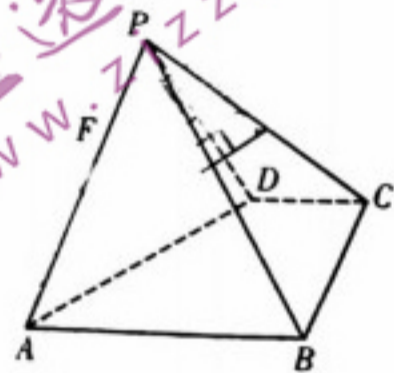
(2) 设点 Q 是椭圆 C 上异于 B_1, B_2 的一动点, 过定点 $E(-1, -1)$ 与动点 Q 的直线与椭圆 C 交于另一点 P , 记直线 QB_1, PB_1 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若直线 PQ 的斜率存在, 求 $k_1 + k_2$ 的值.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \parallel CD, AB \perp BC, \angle DAB = 45^\circ$, $PA = PD = BC = 2CD = 2$.

(1) 若点 F 在线段 AP 上, $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FP}$, $DF \parallel$ 平面 PBC , 求 λ 的值;

(2) 若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 求平面 PAD 与平面 PBC 的夹角的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

甲、乙两名运动员进行乒乓球训练赛,规定每局比赛胜者得 1 分,负者得 0 分,比赛一直进行到一方比另一方多两分为止,多得两分的一方赢得比赛.已知每局比赛中,甲获胜的概率为 p ,乙获胜的概率为 q ,每局比赛结果相互独立.

(1)若比赛最多进行 5 局,求比赛结束时比赛局数 X 的分布列及期望 $E(X)$ 的最大值;

(2)甲、乙两人为达到最佳训练效果,俩人约定不限制比赛局数,记“甲运动员赢得比赛”为事件 M ,证明:
$$P(M) = \frac{p^2}{4+q^2}.$$

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{3}x^2 - 1$, $g(x) = ax \sin x - \frac{1}{2}x^2 + x$.

(1)求证:当 $x > 0$ 时, $f(x) > x$;

(2)若函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有唯一零点,求实数 a 的取值范围.