2023届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)

数学(文科)

全卷满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$N=\{x\mid\sqrt{2^x-1}<5\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

2. 复数 z 满足 $(z-i)(2-i)=i$,则 $|z|=$ ( )

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

3. 已知命题 p:$\log_2 x<1$,命题 q:$\sqrt{x-1}<1$,则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

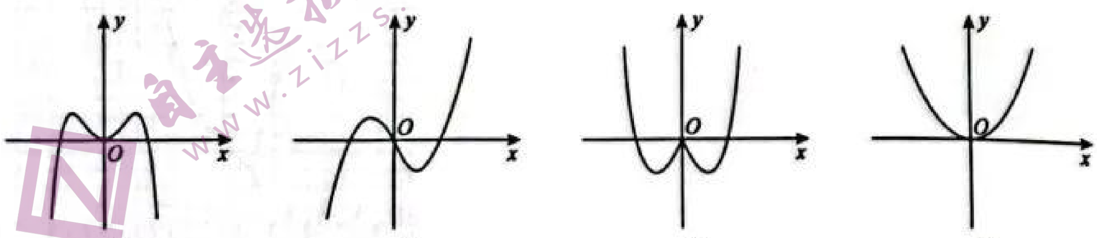
4. 已知正实数 a,b,点 $M(1,4)$ 在直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 上,则 $a+b$ 的最小值为 ( )

A. 4　　B. 6　　C. 9　　D. 12

5. 已知 $\tan\alpha\tan\beta=2$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{5}$,则 $\cos(\alpha-\beta)=$ ( )

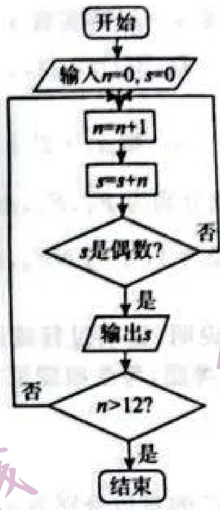
A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{1}{15}$　　D. $-\frac{1}{15}$

6. 函数 $f(x)=(e^x-e^{-x}-2x)\sin x\left(x\in\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ 的图象大致是 ( )



A　　B　　C　　D

7. 若执行下面的程序框图，则输出的 s （　）



A. 有 6 个值，分别为 6,10,28,36,66,78

B. 有 7 个值，分别为 6,10,28,36,66,78,91

C. 有 7 个值，分别为 6,10,28,36,66,78,120

D. 有 8 个值，分别为 6,10,28,36,66,78,120,136

8. 已知圆 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，$\angle BAC=60°$，$BC=2\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=$ （　）

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

9. 函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{8\pi}{15}\right)$ 的最大值为 （　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

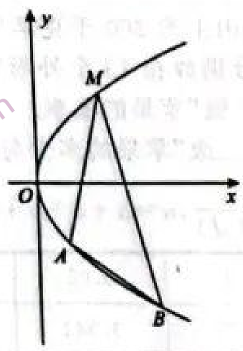
10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，M 为 CC_1 的中点，$A_1C\perp$ 平面 MBD，则 A_1B 与 B_1C 所成角的余弦值为 （　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{2k}=a_{2k-1}+1$，$a_{2k+1}=2a_{2k}-1$，$k\in N^*$，则 $a_{2\,023}=$ （　）

A. $2^{1\,012}$　　B. $2^{1\,012}-1$　　C. $2^{2\,022}$　　D. $2^{2\,022}-1$

12. 已知抛物线 $y^2=4x$ 上有三点 M，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，M 点的纵坐标为 2，$y_1+y_2=-4$，且 $y_1,y_2<2$，则 $\triangle MAB$ 面积的最大值为 （　）



A. $\frac{16\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{16\sqrt{6}}{9}$　　C. $\frac{32\sqrt{3}}{9}$　　D. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $f(x)=ax+\ln x$ 的一条切线是 $y=x$，则实数 $a=$________.

14. 已知一个球的表面上有四点 A,B,C,D，$BD=2\sqrt{3}$，$\angle BAD=60^\circ$，$\angle BCD=90^\circ$，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，则该球的表面积为________.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2$，则 $a_1\cdot 2^1+a_2\cdot 2^2+\cdots+a_n\cdot 2^n=$________.

16. 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 M 位于双曲线的右支上，F_1M 交左支于点 N，$\triangle MNF_2$ 的内切圆 I 的半径为 1，I 与 NF_2,MN 分别切于点 P,R，则 $\cos\angle RNP=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

已知锐角三角形 ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\tan B+\tan C=\dfrac{\sqrt{3}\cos A}{\cos B\cos C}$.

(1)求 A；

(2)若 $a=\sqrt{6}$，求 $b+c$ 的取值范围.

18.（12 分）

为巩固拓展脱贫攻坚成果，全面推进乡村振兴，在国家产业扶贫政策的大力支持下，某贫困村利用当地自然条件，在南、北两山上种植苹果，现已开始大量结果，苹果成熟时，将苹果分为"一级"、"二级"、"三级"，价格从高到低，有一水果商人要收购这里的苹果，收购前，将南山和北山上的苹果各随机摘取了 200 千克，按等级分开后得到的数据为：南山上的"一级"苹果 40 千克，"二级"苹果 150 千克；南、北山上的"三级"苹果共 40 千克；北山上的"一级"苹果 50 千克.（假设两山上的苹果总产量相同，以样本的频率估计概率）

(1)若种植苹果的成本为 5 元/千克，苹果收购价格如下表：

等级	"一级"	"二级"	"三级"
价格(元/千克)	12	8	1

①分别计算南山和北山各随机摘取的 200 千克苹果的平均利润；

②若按个数算，"一级"苹果平均每千克有 3 个，"二级"苹果平均每千克有 4 个，"三级"苹果平均每千克有 6 个，以此计算该村南山上的 200 千克苹果的个数，并按各等级苹果的个数以分层抽样的方式从中抽取 13 个苹果，分别放在 13 个外形完全一样的包装内，水果商人在这 13 个苹果中随机取 2 个，求恰有 1 个"三级"苹果的概率.

(2)判断能否有 90%的把握认为"三级"苹果的多少与南、北山有关.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

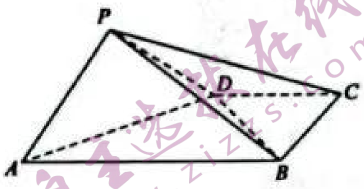
$P(K^2\geq k_0)$	0.1	0.05	0.01	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

19.（12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=CD=2$，$AB//CD$，$\angle ABC=90°$，$PA=PD=2$，$PD\perp BD$.

（1）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PBD；

（2）求点 C 到平面 PAB 的距离.



20.（12 分）

已知点 $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，A，B 分别是椭圆的左、右顶点，直线 MA 和 MB 的斜率之和满足：$k_{MA}+k_{MB}=-1$.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）斜率为 1 的直线交椭圆于 P，Q 两点，椭圆上是否存在定点 T，使直线 PT 和 QT 的斜率之和满足 $k_{PT}+k_{QT}=0$（P，Q 与 T 均不重合）？若存在，求出 T 点坐标；若不存在，说明理由.

21.（12 分）

设函数 $f(x)=mxe^x(m\neq 0)$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若函数 $y=f(x)+x^2+x$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，证明：$x_1+x_3>x_2$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sin t+\dfrac{1}{4\sin t}, \\ y=\sqrt{\sin t}+\dfrac{1}{2\sqrt{\sin t}} \end{cases}$（$t$ 为参数且 $t\in(0,\pi)$），以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\alpha)=m(m\in\mathbf{R})$.

（1）求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的普通方程；

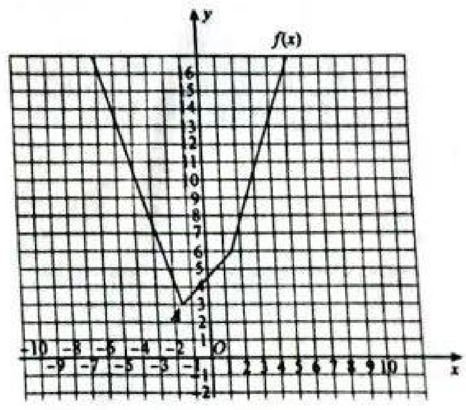
（2）若直线 l 与曲线 C 有公共点，求实数 m 的取值范围.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x+3|+|x-a|(a>0)$ 的图象如图所示，当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 3，$g(x)=-x$.

（1）求实数 a 的值；

（2）若 $g(x-t)\leqslant f(x)$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.



2023 届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)答案

数学(文科)

1. C 【解析】由 $\sqrt{2^x-1}<5$,得 $1\leqslant 2^x<26$,故 $M\cap N=\{1,2,3,4\}$. 故选 C.

2. B 【解析】$z-i=\frac{i}{2-i}=\frac{i(2+i)}{5}$,则 $z=-\frac{1}{5}+\frac{7i}{5}$,故 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\sqrt{2}$. 故选 B.

3. B 【解析】由题意得,命题 p:$0<x<2$,命题 q:$1\leqslant x<2$,故 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

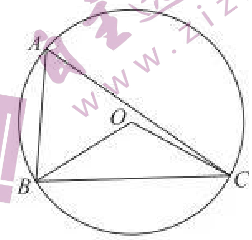
4. C 【解析】由题意得 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$,故 $a+b=(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=1+4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 9$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$ 即 $a=3$,$b=6$ 时,等号成立. 故选 C.

5. A 【解析】由 $\tan\alpha\tan\beta=2$,得 $\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$,与 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{5}$ 联立,解得 $\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{5},\\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{5},\end{cases}$ 故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$. 故选 A.

6. A 【解析】$f(-x)=(e^{-x}-e^{x}+2x)(-\sin x)=f(x)$,可知 $f(x)$ 为偶函数,排除 B;易知,$f(1)>0$,排除 C;$f(\pi)=0$,排除 D. 故选 A.

7. C 【解析】当 $n=3$ 时,输出 $s=6$;当 $n=4$ 时,输出 $s=10$;当 $n=7$ 时,输出 $s=28$;当 $n=8$ 时,输出 $s=36$;当 $n=11$ 时,输出 $s=66$;当 $n=12$ 时,输出 $s=78$;当 $n=15$ 时,$15>12$,输出 $s=120$,结束. 故选 C.

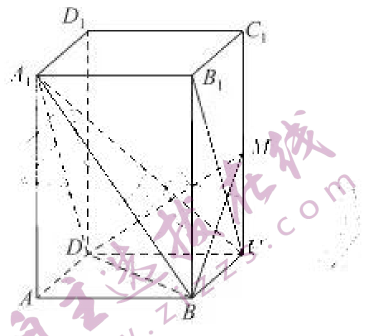
8. B 【解析】如图,



圆 O 的直径为 $2R=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=4$,故 $|OB|=|OC|=R=2$,$\angle BOC=2\angle BAC=120^\circ$,故 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos 120^\circ=-2$. 故选 B.

9. A 【解析】$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}-\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=-\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)$,故最大值为 1. 故选 A.

10. B 【解析】连接 MB,MD,BD,连接 A_1D,如图,



$A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1,则 $A_1B_1\perp BM$,又 $A_1C\perp$ 平面 MBD,则 $A_1C\perp BM$,$A_1C\cap A_1B_1=A_1$,则 $BM\perp$ 平面 A_1B_1C,则 $BM\perp B_1C$,$\angle MBC=\angle BB_1C$,则 $\tan\angle MBC=\tan\angle BB_1C$,则 $\frac{MC}{2}=\frac{2}{BB_1}$,解得 $BB_1=2\sqrt{2}$,由长方体的性质易知,$A_1B_1 \mathrel{\underline{/\!/}} DC$,所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形,所以 $A_1D/\!/B_1C$,则 $\angle BA_1D$ 即为所求角,在 $\triangle BA_1D$ 中,$A_1B=A_1D=2\sqrt{3}$,$BD=2\sqrt{2}$,故 $\cos\angle BA_1D=\frac{12+12-8}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$. 故选 B.

11. B 【解析】$a_{2k+2}=a_{2k+1}+1=2a_{2k}-1+1=2a_{2k}$,故 $\{a_{2k}\}$ 是首项为 $a_2=a_1+1=2$,公比为 2 的等比

数列，则 $a_{2022}=a_2\cdot 2^{1010}=2^{1011}$，$a_{2023}=2a_{2022}-1=2^{1012}-1$. 故选 B.

12. C 【解析】由题意得，$x_M=1$，则 $M(1,2)$，由 $y_1+y_2=-4$，得 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=-1$.

设直线 AB：$x=t-y$，代入抛物线方程得 $y^2+4y-4t=0$，可得 $\Delta=16+16t>0$，得 $t>-1$.

$|AB|=\sqrt{2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{16+16t}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+t}$，点 $M(1,2)$ 到 AB 的距离为 $d=\dfrac{|3-t|}{\sqrt{2}}$，故 $S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=2\sqrt{1+t}\cdot|3-t|=2\sqrt{(1+t)(3-t)^2}$.

由 $y_1,y_2<2$，得 $4+8-4t>0$，即 $t<3$，又 $t>-1$，则 $-1<t<3$. 设 $g(t)=(1+t)(3-t)^2$，则 $g'(t)=(t-3)(3t-1)$，易得当且仅当 $t=\dfrac{1}{3}$ 时，$g(t)$ 取得最大值，为 $\dfrac{256}{27}$，故 $S_{\triangle MAB}$ 最大值为 $\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$. 故选 C.

13. $1-\dfrac{1}{e}$ 【解析】设切点坐标为 (x_0,y_0)，则满足 $x_0=ax_0+\ln x_0$①，$f'(x_0)=a+\dfrac{1}{x_0}=1$，则 $ax_0=x_0-1$，代入①得 $x_0=x_0-1+\ln x_0$，解得 $x_0=e$，

$\therefore a=1-\dfrac{1}{e}$.

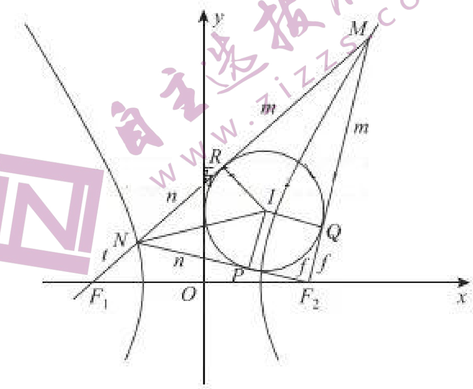
14. 16π 【解析】设球心为 O，半径为 R，BD 的中点为 M，则 M 为 $\triangle BCD$ 的外心，$OM\perp$ 平面 BCD，又平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，故 O 在平面 ABD 内，故 O 为 $\triangle ABD$ 的外心，$\dfrac{BD}{\sin 60^\circ}=2R=4$，故 $S_{球}=4\pi R^2=16\pi$.

15. $(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$ 【解析】当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$，$a_1=1$ 满足 $a_n=2n-1$，故 $a_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$. 令 $S=a_1\cdot 2^1+a_2\cdot 2^2+\cdots+a_n\cdot 2^n=1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$，

则 $2S=1\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n+1}$，

两式相减得，$-S=2^1+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n-1)\cdot 2^{n+1}=2+\dfrac{8(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot 2^{n+1}=(3-2n)\cdot 2^{n+1}-6$，$\therefore S=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$.

16. $\dfrac{3}{5}$ 【解析】设内切圆与 F_2M 切于点 Q，$|MR|=|MQ|=m$，$|NR|=|NP|=n$，$|F_2P|=|F_2Q|=f$，$|F_1N|=t$，如图，



则 $|MF_1|-|MF_2|=2a$，即 $m+n+t-(m+f)=2a$，化简得 $n+t-f=2a$①，$|NF_2|-|NF_1|=2a$，即 $n+f-t=2a$②，①+②得 $n=2a=2$，NI 平分 $\angle RNP$，则 $\tan\dfrac{1}{2}\angle RNP=\dfrac{1}{2}$，故 $\sin\dfrac{1}{2}\angle RNP=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，则 $\cos\angle RNP=1-2\sin^2\dfrac{1}{2}\angle RNP=\dfrac{3}{5}$.

17. 解：(1)由题意得，$\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sqrt{3}\cos A}{\cos B\cos C}$，

化简得 $\sin(B+C)=\sqrt{3}\cos A$，

即 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，

则 $\tan A=\sqrt{3}$，

解得 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由题意及正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=2\sqrt{2}$，

得 $b=2\sqrt{2}\sin B$，$c=2\sqrt{2}\sin C$，

则 $b+c=2\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}\sin C=2\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}\sin(120^\circ-B)=3\sqrt{2}\sin B+\sqrt{6}\cos B=2\sqrt{6}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

由(1)知，$A=\dfrac{\pi}{3}$，

又 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2},\\0<C<\dfrac{\pi}{2},\\B+C=\dfrac{2\pi}{3},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，

则$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,

故 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

故 $b+c$ 的取值范围是$(3\sqrt{2},2\sqrt{6}]$.

18. **解**:(1)①由题意得,南山:"一级"苹果 40 千克,"二级"苹果 150 千克,"三级"苹果 200−190=10(千克),南山随机摘取的 200 千克苹果的平均利润为$\frac{12\times40+8\times150+1\times10-5\times200}{200}=3.45$(元/千克),

北山:"一级"苹果 50 千克,"三级"苹果 40−10=30(千克),"二级"苹果 200−50−30=120(千克),故北山随机摘取的 200 千克苹果的平均利润为$\frac{12\times50+8\times120+1\times30-5\times200}{200}=2.95$(元/千克).

②南山"一级"苹果有 3×40=120(个),"二级"苹果有 4×150=600(个),"三级"苹果有 6×10=60(个),共有 780 个.

按分层抽样的方式抽取的 13 个苹果中,"一级"苹果有$\frac{120}{780}\times13=2$(个),"二级"苹果有$\frac{600}{780}\times13=$10(个),"三级"苹果有$\frac{60}{780}\times13=1$(个),

2 个"一级"苹果分别记为 A_1,A_2,10 个"二级"苹果分别记为 $B_1,B_2,\cdots,B_{10}$,"三级"苹果记为 C,抽取 2 个苹果有$(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),\cdots,(A_1,B_{10}),(A_1,C),(A_2,B_1),(A_2,B_2),\cdots,(A_2,B_{10}),(A_2,C),(B_1,B_2),(B_1,B_3),\cdots,(B_1,B_{10}),(B_1,C),(B_2,B_3),(B_2,B_4),\cdots,(B_2,B_{10}),(B_2,C),\cdots,(B_9,B_{10}),(B_9,C),(B_{10},C)$,共 78 种可能,恰有 1 个"三级"苹果有$(A_1,C),(A_2,C),(B_1,C),(B_2,C),\cdots,(B_{10},C)$,共 12 种可能.

故所求概率为$\frac{12}{78}=\frac{2}{13}$.

(2)由(1)可得以下 2×2 列联表:

	"三级"苹果	"一级"和"二级"苹果	合计
南山	10	190	200
北山	30	170	200
合计	40	360	400

则 $K^2=\frac{400\times(10\times170-30\times190)^2}{200\times360\times200\times40}=\frac{100}{9}>11>2.706$,

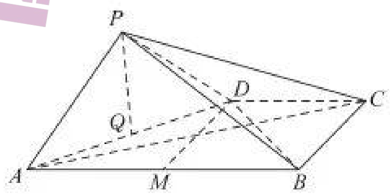
故有 90%的把握认为"三级"苹果的多少与南、北山有关.

19. **解**:(1)证明:∵$\angle ABC=90^\circ$,$AB/\!/CD$,

∴$\angle BCD=90^\circ$,

∴$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=2\sqrt{2}$.

过点 D 作 $DM\perp AB$,如图,



则 $DM=BC=2$,$AM=AB-BM=AB-CD=2$,

∴$AD=\sqrt{DM^2+AM^2}=2\sqrt{2}$.

又∵$AB=4$,$AB^2=BD^2+AD^2$,

∴$\angle ADB=90^\circ$,

∴$AD\perp BD$,

又 $PD\perp BD$,$PD\cap AD=D$,PD,$AD\subset$平面 PAD,

∴$BD\perp$平面 PAD.

∵$PA\subset$平面 PAD,∴$PA\perp BD$.

∵$PA=PD=2$,$AD=2\sqrt{2}$,∴$PA\perp PD$.

∵$BD\cap PD=D$,BD,$PD\subset$平面 PBD,

∴$PA\perp$平面 PBD.

又 $PA\subset$平面 PAB,∴平面 $PAB\perp$平面 PBD.

(2)由 $PA\perp$平面 PBD 易知$\angle APB=90^\circ$,

$PA=2$,$AB=4$,则 $PB=\sqrt{AB^2-PA^2}=2\sqrt{3}$.

∴$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot PA\cdot PB=2\sqrt{3}$.

取 AD 的中点为 Q,连接 PQ,AC,由等腰三角形三线合一的性质易得 $PQ\perp AD$.

又 $BD\perp$平面 PAD,$BD\subset$平面 $ABCD$,则平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,

$PQ\subset$平面 PAD,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,

∴$PQ\perp$平面 $ABCD$,且 $PQ=\sqrt{PA^2-\left(\frac{1}{2}AD\right)^2}=\sqrt{2}$,

设点 C 到平面 PAB 的距离为 h，

易得 $V_{C-PAB}=V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PQ$，

即 $\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times4\times\sqrt{2}$，

解得 $h=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

20. **解**：(1) $k_{MA}+k_{MB}=\frac{\frac{3}{2}-0}{1+a}+\frac{\frac{3}{2}-0}{1-a}=-1$，

解得 $a^2=4$，

将 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $b^2=3$，

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 假设存在定点 T，则设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$T(x_0,y_0)$，直线 PQ 的方程为 $y=x+t$，

由题意得 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}+\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=0$，将 $y_1=x_1+t$，$y_2=x_2+t$ 代入整理得 $2x_1x_2+(t-x_0-y_0)(x_1+x_2)-2x_0(t-y_0)=0(*)$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=x+t,\end{cases}$ 整理得 $7x^2+8tx+4t^2-12=0$.

则 $x_1+x_2=-\frac{8t}{7}$，$x_1x_2=\frac{4t^2-12}{7}$，

代入 $(*)$ 式整理得 $\left(\frac{8}{7}y_0-\frac{6}{7}x_0\right)t+2x_0y_0-\frac{24}{7}=0$，

由 $\begin{cases}\frac{8}{7}y_0-\frac{6}{7}x_0=0,\\ 2x_0y_0-\frac{24}{7}=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=\frac{4\sqrt{7}}{7},\\ y_0=\frac{3\sqrt{7}}{7},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\frac{4\sqrt{7}}{7},\\ y_0=-\frac{3\sqrt{7}}{7},\end{cases}$

代入验证得 $\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$，$\left(-\frac{4\sqrt{7}}{7},-\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$ 都在椭圆上，

故存在定点 T，使 $k_{PT}+k_{QT}=0$，

点 T 的坐标为 $\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$ 或 $\left(-\frac{4\sqrt{7}}{7},-\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$.

21. **解**：(1) $f'(x)=me^x+mxe^x=me^x(x+1)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$.

①若 $m>0$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$，单调递增区间为 $(-1,+\infty)$；

②若 $m<0$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>-1$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,+\infty)$，单调递增区间为 $(-\infty,-1)$.

(2) 证明：因为函数 $y=f(x)+x^2+x$ 有三个零点，所以方程 $mxe^x+x^2+x=0$ 有三个不相等的实数根，又易知 $x=0$ 为方程的一个实根，所以方程 $me^x+x+1=0$ 有两个不相等的实数根，即 $-m=\frac{x+1}{e^x}$ 有两个不相等的实数根.

令 $g(x)=\frac{x+1}{e^x}$，则 $g'(x)=-\frac{x}{e^x}$，

当 $x<0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)\le g(0)=1$.

又因为当 $x<-1$ 时，$g(x)<0$；当 $x>-1$ 时，$g(x)>0$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，

所以 $0<-m<1$，

则 $x_1\in(-1,0)$，$x_2=0$，$x_3\in(0,+\infty)$.

要证 $x_1+x_3>x_2$，即证 $x_1+x_3>0$，即证 $x_3>-x_1>0$，只需证 $g(x_3)<g(-x_1)$.

因为 $-m=g(x_1)=g(x_3)$，

所以只需证 $g(x_1)<g(-x_1)$，即证 $\frac{x_1+1}{e^{x_1}}<\frac{-x_1+1}{e^{-x_1}}$，

即证 $(x_1+1)e^{-x_1}+(x_1-1)e^{x_1}<0$，$x_1\in(-1,0)$.

令 $h(x)=(x+1)e^{-x}+(x-1)e^x$，$x\in(-1,0)$，

则 $h'(x)=-xe^{-x}+xe^x=-x(e^{-x}-e^x)$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$e^{-x}>1>e^x$，故 $h'(x)>0$，$h(x)$ 为增函数，

所以 $h(x_1)<h(0)=0$，

原式得证，故 $x_1+x_3>0$，即 $x_1+x_3>x_2$.

22. **解**：(1)由 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，

得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

$\therefore \rho\sin(\theta+\alpha)=m$，即 $\frac{4}{5}\rho\sin\theta+\frac{3}{5}\rho\cos\theta=m$，

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $3x+4y-5m=0$；

由 $t\in(0,\pi)$ 得 $\sin t\in(0,1]$，

则 $y=\sqrt{\sin t}+\frac{1}{2\sqrt{\sin t}}\in[\sqrt{2},+\infty)$，

又 $y^2=\left(\sqrt{\sin t}+\frac{1}{2\sqrt{\sin t}}\right)^2=\left(\sin t+\frac{1}{4\sin t}+1\right)=x+1$，

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $y^2=x+1$，$y\in[\sqrt{2},+\infty)$。

(2)将 $x=\frac{-4y+5m}{3}$ 代入 $y^2=x+1$ 整理得，

$y^2=\frac{-4y+5m}{3}+1$，$y\in[\sqrt{2},+\infty)$，

则 $m=\frac{3y^2+4y-3}{5}\geqslant\frac{3+4\sqrt{2}}{5}$，

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{3+4\sqrt{2}}{5},+\infty\right)$。

23. **解**：(1)因为 $a>0$，所以 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=|-3+3|+\left|-\frac{3}{2}-a\right|=3$，即 $a+\frac{3}{2}=3$，

解得 $a=\frac{3}{2}$，

故实数 a 的值为 $\frac{3}{2}$。

(2)由题意知，当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 3，

当函数 $g(x)=t-x$ 的图象过点 $A\left(-\frac{3}{2},3\right)$ 时，

即 $t+\frac{3}{2}=3$ 时，$t=\frac{3}{2}$，

而由图象可知，$t\leqslant\frac{3}{2}$，

故 $t\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。