

## 成都七中 2022~2023 学年度第一学期 12 月份检测高二数学 (文科)

满分：150 分，时间：120 分钟

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）。

1. 在我校举办的艺术节舞蹈比赛中，有 15 位评委为选手打分，若选手甲所得分数用茎叶图表示如图所示，则该选手所得分数的中位数为（ ）

|   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| 7 | 3 | 6 | 8 | 9 |   |   |   |  |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 4 | 5 | 7 | 9 |  |
| 9 | 0 | 1 | 2 | 3 |   |   |   |  |

- A. 80                                      B. 81                                      C. 84                                      D. 85

【答案】C

【解析】

【分析】根据茎叶图，结合中位数的定义进行求解即可。

【详解】根据茎叶图，从小到大排列，第 8 个数据为 84，

所以该选手所得分数的中位数为 84，

故选：C

2. 椭圆  $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$  的焦距为（ ）

- A. 1                                      B. 2                                      C. 4                                      D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】直接利用  $c^2 = a^2 - b^2$  计算焦距即可。

【详解】椭圆  $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$ ， $a=3$ ， $b=\sqrt{5}$ ，故  $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$ ，焦距为  $2c=4$ 。

故选：C

3. 分别对“ $x \in A \cap B$ ”和“ $x \in A \cup B$ ”进行描述，正确的是（ ）

- A.  $x \in A$  或  $x \in B$ ， $x \in A$  且  $x \in B$                                       B.  $x \in A$  或  $x \in B$ ， $x \notin A$  或  $x \in B$   
C.  $x \in A$  且  $x \in B$ ， $x \in A$  或  $x \in B$                                       D.  $x \notin A$  且  $x \in B$ ， $x \notin A$  且  $x \in B$

【答案】A

【解析】

【分析】由交集和并集的定义结合集合与元素的关系即可得出答案。

第 6 页/共 20 页

【详解】由交集和并集的定义知，

$x \notin A \cap B$  即  $x \notin A$  或  $x \notin B$ ， $x \notin A \cup B$  即  $x \notin A$  且  $x \notin B$ 。

故选：A。

4. 已知  $O$  为坐标原点， $A(2,2)$ ，则以  $OA$  为直径的圆方程为（ ）

A.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$

B.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

C.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$

D.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 8$

【答案】B

【解析】

【分析】求圆的圆心和半径，根据圆的标准方程即可求解。

【详解】由题知圆心为  $(1,1)$ ，

$$\text{半径 } r = \frac{1}{2}|OA| = \frac{1}{2} \times \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{2},$$

$\therefore$  圆的方程为  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 。

故选：B。

5. 记直线  $l_1, l_2$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ ，命题  $p$ ：“若  $k_1 = k_2$ ，则  $l_1 // l_2$ ”，命题  $q$ ：“若

$k_1 \cdot k_2 = -1$ ，则  $l_1 \perp l_2$ ”，则下列选项中，为真命题的是（ ）

A.  $p \wedge q$

B.  $p \wedge \neg q$

C.  $\neg p \wedge q$

D.

$\neg p \wedge \neg q$

【答案】C

【解析】

【分析】判断  $p$  是假命题， $q$  是真命题，再依次判断每个选项得到答案。

【详解】若  $k_1 = k_2$ ， $l_1, l_2$  可能重合，故命题  $p$  是假命题；

若  $k_1 \cdot k_2 = -1$ ，则  $l_1 \perp l_2$ ，命题  $q$  是真命题。

故  $p \wedge q$  为假命题，A 错误； $p \wedge \neg q$  为假命题，B 错误； $\neg p \wedge q$  为真命题，C 正确； $\neg p \wedge \neg q$

为假命题，D 错误。

故选：C

6. 双曲线  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  的渐近线方程为（ ）

A.  $y = \pm 3x$

B.  $y = \pm \frac{1}{3}x$

C.  $y = \pm \sqrt{3}x$

D.

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

【答案】D

【解析】

【分析】利用双曲线的标准方程，令方程右边的常数 1 为 0，两边开平方，即可得到答案.

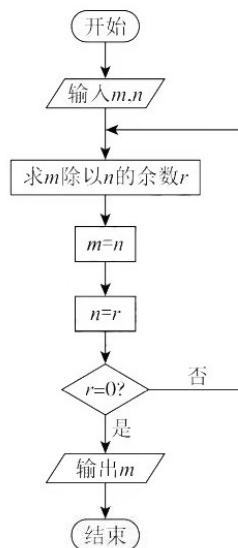
【详解】双曲线  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ ,

由方程  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 0$ ，可得双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ .

故选：D.

【点睛】本题考查双曲线的简单性质的应用，考查渐近线的方程求法，属于基础题.

7. 如图的程序框图的算法思路源于欧几里得在公元前 300 年左右提出的“辗转相除法”. 执行该程序框图，若输入  $m = 1813, n = 333$ ，则输出  $m$  的值为 ( )



A. 4

B. 37

C. 148

D. 333

【答案】B

【解析】

【分析】利用辗转相除法求 1813 和 333 的最大公约数.

【详解】题中程序框图为辗转相除法求 1813 和 333 的最大公约数.

因为  $1813 = 333 \times 5 + 148$ ， $333 = 148 \times 2 + 37$ ， $148 = 37 \times 4 + 0$ ，

所以 1813 和 333 的最大公约数为 37.

故选：B.

8. 为了解某社区居民的家庭年收入年支出的关系，随机调查了该社区 5 户家庭，得到如下

统计数据表:

|             |      |      |      |      |     |
|-------------|------|------|------|------|-----|
| 收入 $x$ (万元) | 8.2  | 8.6  | 10.0 | 11.2 | 12  |
| 支出 $y$ (万元) | 7.40 | 7.50 | 8.00 | 8.50 | $m$ |

但是统计员不小心丢失了一个数据(用  $m$  代替), 在数据丢失之前得到回归直线方程为

$y = 0.76x + 0.4$ , 则  $m$  的值等于 ( )

- A. 8.60                      B. 8.80                      C. 9.25                      D. 9.52

【答案】A

【解析】

【分析】根据表格数据求  $\bar{x}, \bar{y}$ , 由样本中心点  $(\bar{x}, \bar{y})$  在回归直线上, 将点代入即可求  $m$  的值.

【详解】由题设知:  $\bar{x} = \frac{8.2+8.6+10+11.2+12}{5} = 10$ ,

$$\bar{y} = \frac{7.4+7.5+8+8.5+m}{5} = \frac{31.4+m}{5},$$

$\because (\bar{x}, \bar{y})$  在回归直线上,

$$\therefore 0.76 \times 10 + 0.4 = \frac{31.4+m}{5}, \text{ 解得 } m = 8.6.$$

故选: A.

9. 阅读如图所示的程序, 若执行循环体的次数为 5, 则程序中  $a$  的取值范围是 ( )

```

S=0
i=1
DO
    S=S+i
    i=i+1
LOOP UNTIL i > a
PRINT S
END
    
```

- A.  $5 \leq a \leq 6$                       B.  $5 < a < 6$                       C.  $5 < a \leq 6$                       D.

$5 \leq a < 6$

【答案】D

【解析】

【分析】模拟执行该循环体 5 次, 求出此时  $i$  的取值即可判断  $a$  的范围.

【详解】模拟执行程序:

$S = 0, i = 1$ ,

①  $S = 0 + 1, i = 2, 2 \leq a$ ;

②  $S=3, i=3, 3 \leq a$ ;

③  $S=6, i=4, 4 \leq a$ ;

④  $S=10, i=5, 5 \leq a$ ;

⑤  $S=15, i=6, 6 > a$ ,

共执行了 5 次循环体, 结束循环,  $\therefore 5 \leq a < 6$ .

故选: D.

10. 过点  $P(4,1)$  的直线  $l$  与圆  $(x-3)^2 + y^2 = 4$  相交于  $A, B$  两点. 记  $P$ : 直线  $l$  的斜率等于 0,

$q: |AB| = 2\sqrt{3}$ . 则  $P$  是  $q$  的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据充分性、必要性的定义, 结合直线的斜率是否存在进行判断即可.

【详解】当直线  $l$  的斜率等于 0 时, 直线  $l$  的方程为  $y=1$ , 代入方程  $(x-3)^2 + y^2 = 4$  中,

得  $x = 3 \pm \sqrt{3}$ , 显然  $|AB| = 2\sqrt{3}$ ,

当直线  $l$  的不存在斜率时, 直线  $l$  的方程为  $x=4$ , 代入方程  $(x-3)^2 + y^2 = 4$  中,

得  $x = \pm\sqrt{3}$ , 显然  $|AB| = 2\sqrt{3}$ ,

因此  $P$  是  $q$  的充分不必要条件,

故选: A

11. 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 1$ , 点  $A(x_0, 0) (x_0 \geq 0)$ , 动圆  $M$  经过点  $A$  且与圆  $O$  相切, 记动圆圆心  $M$  的轨迹为  $E$ , 有下列几个命题:

①  $x_0 = 0$ , 则轨迹  $E$  表示圆, ②  $0 < x_0 < 1$ , 则轨迹  $E$  表示椭圆, ③  $x_0 = 1$ , 则轨迹  $E$  表示抛物线, ④  $x_0 > 1$ , 则轨迹  $E$  表示双曲线, 其中, 真命题的个数为 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】设动圆  $M$  圆心  $M(x, y)$ , 半径为  $r$ , 根据圆与圆内切和外切两种情况, 结合圆, 抛物线, 椭圆和双曲线的定义, 依次判断每个选项得到答案.

【详解】设动圆  $M$  圆心  $M(x, y)$ , 半径为  $r$ ,

当  $x_0 = 0$  时, 动圆  $M$  与圆  $O$  内切, 故  $|MO| = 1 - r$ , 即  $|MO| = 1 - |MO|$ ,  $|MO| = \frac{1}{2}$ , 轨迹

为圆，①正确；

当  $0 < x_0 < 1$  时，动圆  $M$  与圆  $O$  内切，故  $|MO| = 1 - r$ ，即  $|MO| + |MA| = 1 > |AO|$ ，故轨迹为椭圆，②正确；

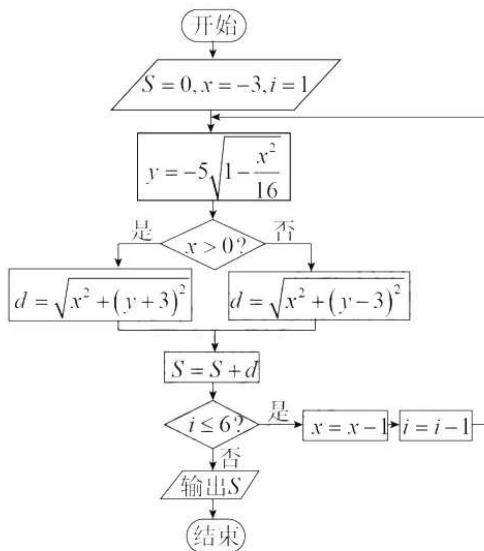
当  $x_0 = 1$  时，动圆  $M$  与圆  $O$  内切时， $|MO| = 1 - r$ ， $|MO| + |MA| = 1 = |AO|$ ，轨迹为线段  $OA$ ；

动圆  $M$  与圆  $O$  外切时， $|MO| = 1 + r$ ， $|MO| - |MA| = 1 = |AO|$ ，轨迹为射线，③错误；

当  $x_0 > 1$  时，动圆  $M$  与圆  $O$  外切， $|MO| = 1 + r$ ，即  $|MO| - |MA| = 1 < |AO|$ ，故轨迹为双曲线，④正确。

故选：C

12. 某算法的程序框图如图所示，则执行该程序后输出的  $S$  等于 ( )



A. 24

B. 26

C. 30

D. 32

【答案】D

【解析】

【分析】确定函数表示椭圆的上半部分， $d$  表示椭圆上的点到一个焦点的距离， $S$  表示距离之和，画出图像计算得到答案。

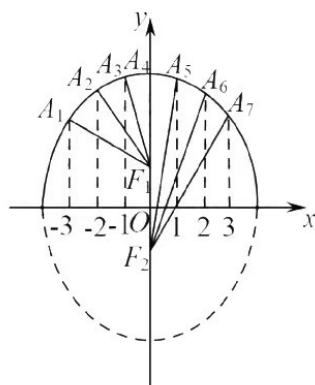
【详解】 $y = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$ ，即  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ，( $y \geq 0$ )，表示椭圆的上半部分，

焦点为  $F_1(0, 3)$ ， $F_2(0, -3)$ ， $d$  表示椭圆上的点到一个焦点的距离， $S$  表示距离之和，

如图所示：

$$S = A_1F_1 + A_2F_1 + A_3F_1 + A_4F_1 + A_5F_2 + A_6F_2 + A_7F_2 = 3 \times (2a) + a - c = 7a - c = 32.$$

故选：D



二 填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

13. 抛物线  $y = 2x^2$  的焦点到准线的距离等于\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 先将抛物线方程  $y = 2x^2$ ，转化为标准方程，求得焦点坐标，准线方程即可.

【详解】 因为抛物线方程是  $y = 2x^2$ ，

转化为标准方程得：  $x^2 = \frac{1}{2}y$ ，

所以抛物线开口方向向右，焦点坐标为  $F\left(\frac{1}{8}, 0\right)$  准线方程为：  $x = -\frac{1}{8}$ ，

所以焦点到准线的距离等于  $\frac{1}{4}$ 。

故答案为：  $\frac{1}{4}$

【点睛】 本题主要考查抛物线的标准方程，还考查了理解辨析的能力，属于基础题.

14. 命题“对  $\forall b \in \mathbf{R}$ ，方程  $\frac{x^2}{b^2+1} + \frac{y^2}{a} = 1$  表示焦点在  $x$  轴上的椭圆”为真命题，则满足条件的  $a$  的一个值可以是\_\_\_\_\_.

【答案】 0.5（填满足  $0 < a < 1$  的任意实数均可）

【解析】

【分析】 由题意知，  $b^2 + 1 > a > 0$ ，又因为  $b^2 + 1 \geq 1$ ，可求出  $0 < a < 1$ ，即可得出答案.

【详解】 因为命题“对  $\forall b \in \mathbf{R}$ ，方程  $\frac{x^2}{b^2+1} + \frac{y^2}{a} = 1$  表示焦点在  $x$  轴上的椭圆”为真命题，

则  $b^2 + 1 > a > 0$ ，

因为  $b^2 + 1 \geq 1$ , 所以  $0 < a < 1$ .

故答案为: 0.5 (填满足  $0 < a < 1$  的任意实数均可).

15. 在平面直角坐标系中, 已知点  $A(1, 4)$ ,  $B(-3, -2)$ , 现将坐标平面沿  $x$  轴折成直二面角, 则折叠后  $A, B$  间的距离为\_\_\_\_\_.

【答案】6

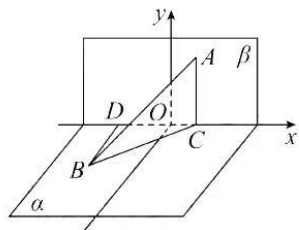
【解析】

【分析】如图所示, 过  $A$  作  $AC \perp x$  轴于  $C$ , 作  $BD \perp x$  轴于  $D$ , 确定  $AC \perp BC$ , 利用勾股定理计算即可.

【详解】如图所示: 过  $A$  作  $AC \perp x$  轴于  $C$ , 作  $BD \perp x$  轴于  $D$ ,  
折叠后的两个平面为  $\alpha, \beta$ ,  $\alpha \perp \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = x$  轴,  $AC \perp x$  轴, 故  $AC \perp \alpha$ ,  
 $BC \subset \alpha$ , 故  $AC \perp BC$ ,

$$\text{则 } |BC| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \quad |AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{16 + 20} = 6.$$

故答案为: 6



16. 已知点  $M(2, 0)$ , 直线  $l: 2ax - (a+1)y + 4 = 0$  ( $a \in \mathbb{R}$ ),  $M$  关于直线  $l$  的对称点为点  $N$ , 则  $\vec{OM} \cdot \vec{ON}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】 $[-4, 12]$

【解析】

【分析】利用对称将向量相乘转化为求点的运动轨迹问题, 做出图像即可得到  $\vec{OM} \cdot \vec{ON}$  的取值范围.

【详解】解: 由题意,  $a \in \mathbb{R}$

在  $l: 2ax - (a+1)y + 4 = 0$  中,  $M(2, 0)$ ,  $\vec{OM} = (2, 0)$

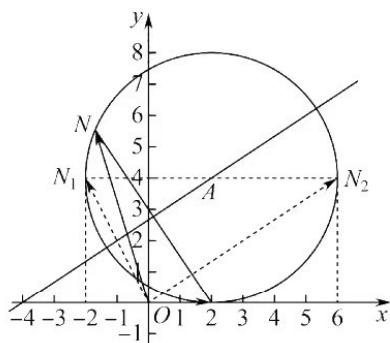
$$l: a(2x - y) - y + 4 = 0$$

$\therefore$  直线  $l$  过点  $A(2, 4)$

$\because M$  关于直线  $l$  的对称点为点  $N$

$\therefore$  直线为线段  $MN$  的垂直平分线

- ∵ 直线  $l$  过点  $A(2,4)$  的任意直线，  
 ∴ 直线的轨迹是以点  $A(2,4)$  为圆心的旋转圆，  
 ∴ 点  $M$  和点  $N$  在以点  $A(2,4)$  为圆心 4 为半径的圆上，



由图可知

当点  $N$  在  $N_1(-2,4)$  时， $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$  最小，为：

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = (2,0) \cdot (-2,4) = 2 \times (-2) + 0 \times 4 = -4$$

当点  $N$  在  $N_2(6,4)$  时， $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$  最大，为：

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = (2,0) \cdot (6,4) = 2 \times 6 + 0 \times 4 = 12$$

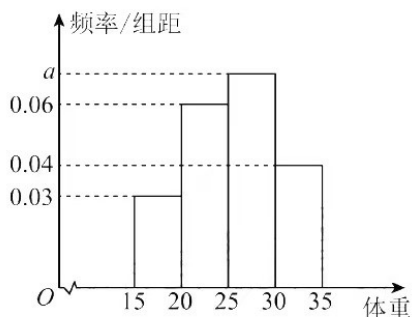
∴  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$  的取值范围为  $[-4,12]$

故答案为：  $[-4,12]$  .

【点睛】 本题考查数形结合的思想，考查学生的作图能力.

### 三. 解答题 ( 本题共 6 小题, 共 70 分, 写清楚必要的文字说明与演算步骤)

17. 某幼儿园为调查学生的年龄与体重之间的关系, 现从全校学生中随机抽取 100 名学生对他们的体重进行分析, 这 100 个样本已经按体重  $[15,20), [20,25), [25,30), [30,35]$  (单位: 公斤) 分成四组, 绘制成如图所示的频率分布直方图.



(1) 若要从体重在  $[15, 20)$ ,  $[20, 25)$ ,  $[25, 30)$  三组内的学生中, 用分层抽样的方法

选取 16 人参加一项活动，求从体重在[25, 30)内的学生中应选取的人数；

(2) 求这 100 名学生的平均体重.

【答案】(1) 7；

(2) 25.5.

【解析】

【分析】(1) 根据在频率分布直方图中，所有小矩形的面积之和为 1，结合分层抽样的性质进行求解即可；

(2) 根据平均数的定义进行求解即可.

【小问 1 详解】

$$(0.03+0.04+0.06+a) \times 5 = 1,$$

所以解得  $a = 0.07$ ,

体重在[15, 20), [20, 25), [25, 30)三组内的学生人数分别为 15、30、35 人

设体重在[25, 30)内的学生中应选取的人数为  $x$ ,

$$\text{则 } \frac{x}{35} = \frac{16}{15+30+35} \Rightarrow x = 7;$$

【小问 2 详解】

这 100 名学生中，体重在[15, 20)内的频率为  $\frac{15}{100}$ ，体重在[20, 25)内的频率为  $\frac{30}{100}$ ，

体重在[25, 30)内的频率为  $\frac{35}{100}$ ，体重在[30, 35)内的频率为  $\frac{20}{100}$ ，

$$\text{所以平均体重为 } \frac{15}{100} \times \frac{35}{2} + \frac{30}{100} \times \frac{45}{2} + \frac{35}{100} \times \frac{55}{2} + \frac{20}{100} \times \frac{65}{2} = 25.5.$$

18. 已知  $p$ : 方程  $\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{m+2} = 1$  表示双曲线  $E$ ,  $q$ : 方程  $x^2 + y^2 - 2y + 2 = m$  表示圆  $C$ .

(1) 若  $p \vee q$  为真,  $p \wedge q$  为假, 求  $m$  的取值范围;

(2) 若  $p \wedge q$  为真, 求双曲线  $E$  的离心率的取值范围.

【答案】(1)  $m \in (-2, 1] \cup [2, +\infty)$

(2)  $e \in (1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

【解析】

【分析】(1) 当  $p$  为真命题时,  $-2 < m < 2$ , 当  $q$  为真命题时,  $m > 1$ , 考虑  $p$  真  $q$  假和  $p$  假  $q$  真两种情况, 计算得到答案.

(2) 确定  $m \in (1, 2)$ ,  $e^2 = \frac{4}{m+2}$ , 根据  $m$  范围得到离心率的取值范围.

【小问 1 详解】

$p \vee q$  为真命题,  $p \wedge q$  为假, 故  $p, q$  恰有一个是真命题.

当  $p$  为真命题时,  $(m-2)(m+2) < 0$ , 解得  $-2 < m < 2$ ;

当  $q$  为真命题时,  $x^2 + y^2 - 2y + 2 = m$ , 即  $x^2 + (y-1)^2 = m-1$ , 故  $m > 1$ .

当  $p$  真  $q$  假时,  $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq 1 \end{cases}$ , 解得  $-2 < m \leq 1$ ;

当  $p$  假  $q$  真时,  $\begin{cases} m \geq 2 \\ m > 1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} m \leq -2 \\ m > 1 \end{cases}$ , 解得  $m \geq 2$ .

综上所述:  $m$  的取值范围是  $m \in (-2, 1] \cup [2, +\infty)$ .

【小问 2 详解】

$p \wedge q$  为真, 则  $m \in (1, 2)$ , 根据双曲线  $E$  的方程得  $a^2 = m+2, b^2 = 2-m$ .

所以  $e^2 = \frac{4}{m+2}$ ,  $1 < m < 2$ ,  $3 < 2+m < 4$ ,  $1 < \frac{4}{2-m} < \frac{4}{3}$ .

所以双曲线的离心率  $e \in (1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ .

19. 已知某同学的物理成绩  $y$  (单位: 分, 满分 100 分) 与数学成绩  $x$  (单位: 分, 满分 150 分) 之间具有线性相关关系, 在连续的五次月考中, 该生的物理成绩与数学成绩统计如下表:

|          |     |     |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 数学成绩 $x$ | 120 | 110 | 125 | 130 | 115 |
| 物理成绩 $y$ | 92  | 83  | 90  | 96  | 89  |

(1) 根据该同学的数学与物理成绩, 若都以 100 分值计算, 判断哪一科更稳定;

(2) 利用上表中的五组数据求回归直线方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ . 若在第六次月考中该生数学成绩为  $x = 135$ , 利用该回归直线方程预测第六次月考的物理成绩.

参考公式:  $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ,  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

【答案】(1) 物理成绩更加稳定;

(2) 98.1 分.

【解析】

【分析】(1) 根据方差的运算公式和性质进行求解判断即可;

(2) 根据题中所给的公式, 利用代入法进行求解即可.

【小问 1 详解】

根据表中数据可得:

$$\bar{x} = \frac{120+110+125+130+115}{5} = 120, \bar{y} = \frac{92+83+90+96+89}{5} = 90,$$

按 100 分值计算, 数学学科的方差为:

$$s_1^2 = \frac{1}{5}(0^2+10^2+5^2+10^2+5^2) \times \left(\frac{100}{150}\right)^2 = \frac{200}{9},$$

$$\text{物理学科的方差为 } s_2^2 = \frac{1}{5}(2^2+7^2+0^2+6^2+1^2) = 18,$$

$$\therefore \frac{200}{9} > 18,$$

所以均以 100 分值计算, 该同学物理成绩更加稳定;

【小问 2 详解】

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 135$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 250 \therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = 0.54,$$

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = 90 - 0.54 \times 120 \therefore \hat{a} = 25.2,$$

故所求回归直线的方程为  $\hat{y} = 0.54x + 25.2$

当  $x = 135$ ,  $\therefore \hat{y} = 98.1$  (分)

$\therefore$  故第六次月考物理成绩预测值为 98.1 分.

20. 已知动圆  $P$  的圆心  $P$  在  $y$  轴的右侧, 圆  $P$  与  $y$  轴相切且与圆  $C: x^2 + y^2 = 2x$  外切.

(1) 求动圆圆心  $P$  的轨迹  $E$  方程;

(2) 过圆心  $C$  作直线  $l$  与轨迹  $E$  和圆  $C$  交于四个点, 自上而下依次为  $A, M, N, B$ , 若

$|AM|, |MN|, |NB|$  成等差数列, 求直线  $l$  的方程;

【答案】(1)  $y^2 = 4x (x > 0)$

(2)  $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$  或  $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据相切和外切得到圆心  $P$  到直线  $x = -1$  的距离等于圆心到  $C(1, 0)$  的距离, 轨迹为抛物线, 计算得到答案.

(2) 确定  $|MN| = 2$  得到  $|AB| = 6$ , 设出直线, 联立方程, 得到根与系数的关系, 根据弦长公式计算即可.

【小问 1 详解】

设动圆  $P$  的半径为  $r$ ，圆  $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ ，圆心为  $C(1,0)$ ，半径为 1，

则  $|PC| = r+1$ ，又圆心  $P$  到  $y$  轴的距离为  $r$ ，则圆心  $P$  到直线  $x=-1$  的距离为  $r+1$ ，

由抛物线的定义得圆心  $P$  的轨迹  $E$  方程为抛物线，且  $\frac{p}{2} = 1$ ， $p = 2$ ，

故轨迹方程为： $y^2 = 4x(x > 0)$

【小问 2 详解】

由圆  $C$  的半径为 1 可得  $|MN| = 2$ ， $|AM|, |MN|, |NB|$  成等差数列，

故  $|AM| + |NB| = 2|MN| = 4$ ，又  $|AM| + |NB| = |AB| - |MN|$ ， $|AB| = 6$ ，

设直线  $l: x = my + 1$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，联立  $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ， $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 4m \\ y_1 y_2 = -4 \end{cases}, |AB| = \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{1+m^2} \sqrt{16m^2 + 16} = 6,$$

解得  $m^2 = \frac{1}{2}$ ， $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，此时  $\Delta > 0$  成立，

所以直线  $l$  的方程为  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1$ ，即  $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$  或  $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}$

21. 已知  $a > 0$ ，三条直线  $l_1: ax - y + a = 0, l_2: x + ay - a(a+1) = 0, l_3: (a+1)x - y + a + 1 = 0$  两两相交，交点分别为  $A, B, C$ 。

(1) 证明： $\triangle ABC$  是直角三角形，且有一个顶点为定点；

(2) 求  $\triangle ABC$  面积的最大值。

【答案】(1) 证明见解析；

(2)  $\frac{3}{4}$ 。

【解析】

【分析】(1) 根据直线垂直的性质，结合直线点斜式方程的特征进行求解即可；

(2) 根据三角形面积公式，结合基本不等式进行求解即可。

【小问 1 详解】

记  $l_1, l_2$  的交点为  $A$ ，记  $l_1, l_3$  的交点为  $B$ ，记  $l_2, l_3$  的交点为  $C$ ，

$\because l_1: ax - y + a = 0$  的斜率为  $k_1 = a$ ， $l_2: x + ay - a(a+1) = 0$  的斜率为  $k_2 = -\frac{1}{a}$ ，

$\therefore k_1 k_2 = -1$ ，

$\therefore l_1 \perp l_2$ ，即  $\triangle ABC$  是直角三角形，其中  $A = 90^\circ$ ，

又  $\because l_1: ax - y + a = 0 \Rightarrow y = a(x+1)$ , 所以过定点  $(-1, 0)$ ,

$l_3: (a+1)x - y + a+1 = 0 \Rightarrow y = (a+1)(x+1)$ , 所以过定点  $(-1, 0)$ ,

$\triangle ABC$  有一个顶点  $B$  为定点  $(-1, 0)$ ;

【小问 2 详解】

$\triangle ABC$  的面积为  $S = \frac{1}{2} |AB| |AC|$ ,

其中  $AB$  为  $B(-1, 0)$  到直线  $l_2$  的距离, 即  $|AB| = \frac{|a^2 + a + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$ ,

又  $l_2, l_3$  得交点为  $C(0, a+1)$  到直线  $l_1$  的距离, 即  $|AC| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ ,

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{|a^2 + a + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{a^2 + 1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{a + \frac{1}{a}} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}} \right) = \frac{3}{4},$$

当且仅当  $a = \frac{1}{a}$  时取等号,

$\therefore a = 1$  时,  $\triangle ABC$  面积取得最大值  $\frac{3}{4}$ .

22. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 抛物线  $y^2 = 4x$  与椭圆有相

同的焦点, 点  $P$  为抛物线与椭圆在第一象限的交点, 且  $|PF_1| = \frac{7}{3}$ .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过  $F$  作两条斜率不为 0 且互相垂直的直线分别交椭圆于  $A, B$  和  $C, D$ , 线段  $AB$  的中点为  $M$ , 线段  $CD$  的中点为  $N$ , 证明: 直线  $MN$  过定点, 并求出该定点的坐标.

【答案】(1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ;

(2) 证明见解析, 定点  $(\frac{4}{7}, 0)$ .

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线的焦点坐标, 结合余弦定理、抛物线和椭圆的定义进行求解即可;

(2) 直线方程与椭圆方程联立, 根据一元二次方程根与系数关系, 结合中点坐标公式进行求解即可.

【小问 1 详解】

抛物线焦点坐标为  $(1, 0)$ , 故  $a^2 - b^2 = 1$ .

设  $|PF_2| = t$ ，由抛物线定义得：点  $P$  到直线  $x = -1$  的距离为  $t$ 。

$$\therefore \cos \angle PF_1F_2 = \frac{3t}{7}, \text{ 由余弦定理, 得 } \cos \angle PF_1F_2 = \frac{4 + \frac{49}{4} - t^2}{2 \times 2 \times \frac{7}{3}} = \frac{3t}{7}.$$

整理, 得  $9t^2 + 36t - 65 = 0$ , 解得  $t = \frac{5}{3}$  或  $t = -\frac{13}{3}$  (舍去)。

由椭圆定义, 得  $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$ ,

$$\therefore a = 2, b = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$$

【小问 2 详解】

设  $l_{AB}: x = my + 1, (m \neq 0)$ ,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

$$\text{即 } y_A + y_B = \frac{-6m}{3m^2 + 4},$$

$$\therefore y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3m}{3m^2 + 4}, \text{ 代入直线方程得 } x_M = \frac{4}{3m^2 + 4},$$

$$\therefore M\left(\frac{4}{3m^2 + 4}, \frac{-3m}{3m^2 + 4}\right),$$

$$\text{同理可得 } \therefore N\left(\frac{4m^2}{4m^2 + 3}, \frac{3m}{4m^2 + 3}\right),$$

$$\therefore k_{MN} = \frac{7m}{4m^2 - 4},$$

$$\therefore l_{MN}: y + \frac{3m}{3m^2 + 4} = \frac{7m}{4m^2 - 4}\left(x - \frac{4}{3m^2 + 4}\right),$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } x = \frac{4}{3m^2 + 4} + \frac{12m^2 - 12}{7(3m^2 + 4)} = \frac{12m^2 + 16}{7(3m^2 + 4)} = \frac{4}{7},$$

所以直线  $MN$  过定点  $\left(\frac{4}{7}, 0\right)$ 。

【点睛】关键点睛：利用一元二次方程根与系数的关系是解题的关键

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线