

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

本试卷共5页,23题(含选考题)。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

★祝考试顺利★

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z = \frac{3-i}{1+2i}$, 则 $|z| =$

A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1
2. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$, 则 $B \cap \complement_U A =$

A. $\{1, 6\}$ B. $\{1, 7\}$
C. $\{6, 7\}$ D. $\{1, 6, 7\}$
3. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则

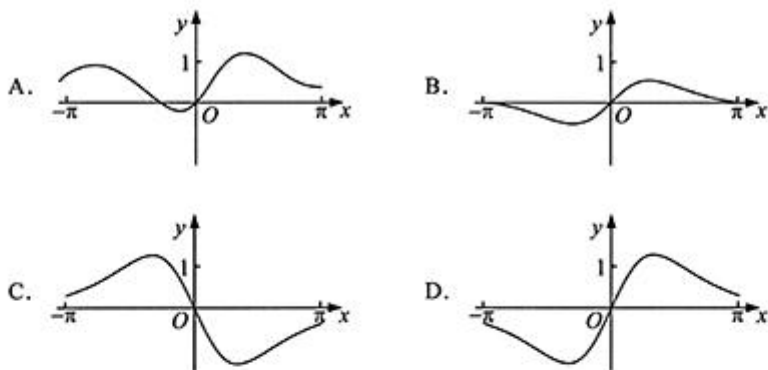
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$
4. 古希腊时期,人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此。此外,最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。若某人满足上述两个黄金分割比例,且腿长为105 cm, 头顶至脖子下端的长度为26 cm, 则其身高可能是

A. 165 cm B. 175 cm C. 185 cm D. 190 cm



文科数学试题 第1页(共5页)

5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



6. 某学校为了解1000名新生的身体素质,将这些学生编号为1,2,...,1000,从这些新生中用系统抽样方法等距抽取100名学生进行体质测验.若46号学生被抽到,则下面4名学生中被抽到的是

- A. 8号学生 B. 200号学生 C. 616号学生 D. 815号学生

7. $\tan 255^\circ =$

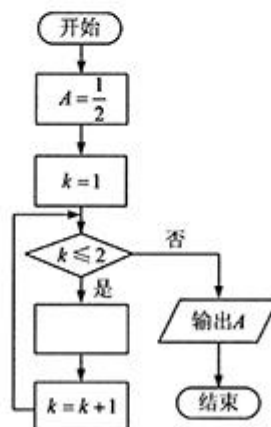
- A. $-2 - \sqrt{3}$ B. $-2 + \sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $2 + \sqrt{3}$

8. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$, 且 $(a - b) \perp b$, 则 a 与 b 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

9. 右图是求 $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入

- A. $A = \frac{1}{2 + A}$
B. $A = 2 + \frac{1}{A}$
C. $A = \frac{1}{1 + 2A}$
D. $A = 1 + \frac{1}{2A}$



10. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线的倾斜角为 130° , 则 C 的离心率为
- A. $2\sin 40^\circ$ B. $2\cos 40^\circ$ C. $\frac{1}{\sin 50^\circ}$ D. $\frac{1}{\cos 50^\circ}$
11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a\sin A - b\sin B = 4c\sin C$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, 则 $\frac{b}{c} =$
- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3
12. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AF_2| = 2|F_2B|$, $|AB| = |BF_1|$, 则 C 的方程为
- A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.
14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 = 1, S_3 = \frac{3}{4}$, 则 $S_4 =$ _____.
15. 函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{3\pi}{2}) - 3\cos x$ 的最小值为_____.
16. 已知 $\angle ACB = 90^\circ$, P 为平面 ABC 外一点, $PC = 2$, 点 P 到 $\angle ACB$ 两边 AC, BC 的距离均为 $\sqrt{3}$, 那么 P 到平面 ABC 的距离为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

某商场为提高服务质量, 随机调查了 50 名男顾客和 50 名女顾客, 每位顾客对该商场的服务给出满意或不满意的评价, 得到下面列联表:

	满意	不满意
男顾客	40	10
女顾客	30	20

- (1) 分别估计男、女顾客对该商场服务满意的概率;
(2) 能否有 95% 的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

文科数学试题 第 3 页 (共 5 页)

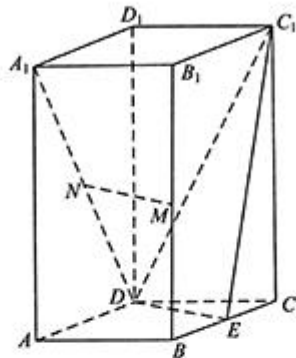
18. (12分)

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_6 = -a_7$.

- (1) 若 $a_3 = 4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $a_1 > 0$, 求使得 $S_n \geq a_n$ 的 n 的取值范围.

19. (12分)

如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1 = 4$, $AB = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.



- (1) 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;
- (2) 求点 C 到平面 C_1DE 的距离.

20. (12分)

已知函数 $f(x) = 2\sin x - x\cos x - x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

- (1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 存在唯一零点;
- (2) 若 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.

21. (12分)

已知点 A, B 关于坐标原点 O 对称, $|AB| = 4$, $\odot M$ 过点 A, B 且与直线 $x + 2 = 0$ 相切.

- (1) 若 A 在直线 $x + y = 0$ 上, 求 $\odot M$ 的半径;
- (2) 是否存在定点 P , 使得当 A 运动时, $|MA| - |MP|$ 为定值? 并说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$.

- (1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;
- (2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

文科数学试题 第 4 页 (共 5 页)

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc=1$. 证明:

(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$;

(2) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$.

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题参考答案

一、选择题

1. C 2. C 3. B 4. B 5. D 6. C
7. D 8. B 9. A 10. D 11. A 12. B

二、填空题

13. $y - 3x$ 14. $\frac{5}{8}$ 15. -4 16. $\sqrt{2}$

三、解答题

17. 解:

(1) 由调查数据, 男顾客中对该商场服务满意的比率为 $\frac{40}{50} = 0.8$, 因此男顾客对该商场服务满意的概率的估计值为 0.8.

女顾客中对该商场服务满意的比率为 $\frac{30}{50} = 0.6$, 因此女顾客对该商场服务满意的概率的估计值为 0.6.

$$(2) K^2 = \frac{100 \times (40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{50 \times 50 \times 70 \times 30} \approx 4.762.$$

由于 $4.762 > 3.841$, 故有 95% 的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异.

18. 解:

(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

$$\text{由 } S_2 = -a_2 \text{ 得 } a_1 + 4d = 0.$$

$$\text{由 } a_3 = 4 \text{ 得 } a_1 + 2d = 4.$$

$$\text{于是 } a_1 = 8, d = -2.$$

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 10 - 2n$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } a_1 = -4d, \text{ 故 } a_n = (n-5)d, S_n = \frac{n(n-9)d}{2}.$$

由 $a_1 > 0$ 知 $d < 0$, 故 $S_n \geq a_n$ 等价于 $n^2 - 11n + 10 \leq 0$, 解得 $1 \leq n \leq 10$.

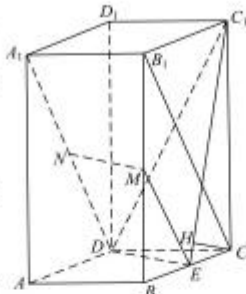
所以 n 的取值范围是 $\{n | 1 \leq n \leq 10, n \in \mathbb{N}\}$.

文科数学试题参考答案 第1页 (共4页)

19. 解:

(1) 连结 B_1C , ME . 因为 M, E 分别为 BB_1, BC 的中点, 所以 $ME \parallel B_1C$, 且 $ME = \frac{1}{2}B_1C$. 又因为 N 为 A_1D 的中点, 所以 $ND = \frac{1}{2}A_1D$.

由题设知 $A_1B_1 \perp DC$, 可得 $B_1C \perp A_1D$, 故 $ME \perp ND$, 因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形, $MN \parallel ED$. 又 $MN \not\subset$ 平面 C_1DE , 所以 $MN \parallel$ 平面 C_1DE .



(2) 过 C 作 C_1E 的垂线, 垂足为 H .

由已知可得 $DE \perp BC$, $DE \perp C_1C$, 所以 $DE \perp$ 平面 C_1CE , 故 $DE \perp CH$.

从而 $CH \perp$ 平面 C_1DE , 故 CH 的长即为 C 到平面 C_1DE 的距离.

由已知可得 $CE=1$, $C_1C=4$, 所以 $C_1E=\sqrt{17}$, 故 $CH = \frac{4\sqrt{17}}{17}$. 从而点 C 到平面 C_1DE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

20. 解:

(1) 设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g(x) = \cos x + x \sin x - 1$, $g'(x) = x \cos x$.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递减.

又 $g(0) = 0$, $g(\frac{\pi}{2}) > 0$, $g(\pi) = -2$, 故 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 存在唯一零点.

所以 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 存在唯一零点.

(2) 由题设知 $f(\pi) \geq a\pi$, $f(\pi) = 0$, 可得 $a \leq 0$.

由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 只有一个零点, 设为 x_0 , 且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, 在 (x_0, π) 单调递减.

又 $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$, 所以, 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq 0$.

又当 $a \leq 0$, $x \in [0, \pi]$ 时, $ax \leq 0$, 故 $f(x) \geq ax$.

因此, a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

文科数学试题参考答案 第2页 (共4页)

21. 解:

(1) 因为 $\square M$ 过点 A, B , 所以圆心 M 在 AB 的垂直平分线上. 由已知 A 在直线 $x+y=0$ 上, 且 A, B 关于坐标原点 O 对称, 所以 M 在直线 $y=x$ 上, 故可设 $M(a, a)$.

因为 $\square M$ 与直线 $x+2=0$ 相切, 所以 $\square M$ 的半径为 $r=|a+2|$.

由已知得 $|AO|=2$, 又 $\overline{MO} \perp \overline{AO}$, 故可得 $2a^2+4=(a+2)^2$, 解得 $a=0$ 或 $a=4$.

故 $\square M$ 的半径 $r=2$ 或 $r=6$.

(2) 存在定点 $P(1,0)$, 使得 $|MA|-|MP|$ 为定值.

理由如下:

设 $M(x, y)$, 由已知得 $\square M$ 的半径为 $r=|x+2|$, $|AO|=2$.

由于 $\overline{MO} \perp \overline{AO}$, 故可得 $x^2+y^2+4=(x+2)^2$, 化简得 M 的轨迹方程为 $y^2=4x$.

因为曲线 $C: y^2=4x$ 是以点 $P(1,0)$ 为焦点, 以直线 $x=-1$ 为准线的抛物线, 所以 $|MP|=x+1$.

因为 $|MA|-|MP|=r-|MP|=x+2-(x+1)=1$, 所以存在满足条件的定点 P .

22. 解:

(1) 因为 $-1 < \frac{1-t^2}{1+t^2} \leq 1$, 且 $x^2 + (\frac{y}{2})^2 = (\frac{1-t^2}{1+t^2})^2 + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$, 所以 C 的直角坐标方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq -1)$.

l 的直角坐标方程为 $2x + \sqrt{3}y + 11 = 0$.

(2) 由 (1) 可设 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, $-\pi < \alpha < \pi$).

C 上的点到 l 的距离为

$$\frac{|2 \cos \alpha + 2\sqrt{3} \sin \alpha + 11|}{\sqrt{7}} = \frac{4 \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + 11}{\sqrt{7}}.$$

当 $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ 时, $4 \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + 11$ 取得最小值 7, 故 C 上的点到 l 距离的最小值为 $\sqrt{7}$.

文科数学试题参考答案 第3页 (共4页)

23. 解:

(1) 因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ac$, 又 $abc = 1$, 故有

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$.

(2) 因为 a, b, c 为正数且 $abc = 1$, 故有

$$\begin{aligned} (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 &\geq 3\sqrt{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3} \\ &= 3(a+b)(b+c)(a+c) \\ &\geq 3 \times (2\sqrt{ab}) \times (2\sqrt{bc}) \times (2\sqrt{ac}) \\ &= 24. \end{aligned}$$

所以 $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注