2022 年全国普通高等学校招生统一考试
上海　数学试卷

考生注意：

1、本试卷共 4 页，21 道试题，满分 150 分，考试时间 120 分钟.

2、本考试分设试卷和答题纸，试卷包括试题与答题要求，作答必涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分.

3、答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名.

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，第 1 题至第 6 题每个空格填对得 4 分，第 7 题至第 12 题每个空格填对得 5 分，否则一律得零分.

1. 已知复数 $z=1+i$（其中 i 为虚数单位），则 $2\bar{z}=$________.

2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$ 的实轴长为________.

3. 函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+1$ 的最小正周期为__________.

4. 已知 $a\in R$，行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值相等，则 $a=$________.

5. 已知圆柱的高为 4，底面积为 9π，则该圆柱的侧面积为__________.

6. 已知 $x+y\geq 0, x-y-1\leq 0$，则 $z=x+2y$ 的最小值为___________.

7. 在二项式 $(3+x)^n$（n 是正整数）的展开式中，x^2 项的系数是常数项的 5 倍，则 $n=$ ___________.

8. 若函数 $f(x)=\begin{cases} a^2x-1, x<0 \\ 0, x=0 \\ x+a, x>0 \end{cases}$ 为奇函数，则实数 $a=$________.

9. 为了检测学生的身体素质指标，从包括游泳类 1 项，球类 3 项，田径类 4 项的共 8 项体育项目中随机抽取 4 项进行测试，则每类项目都被抽到的概率为___________.（用分数作答）

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零，记 S_n 为其前 n 项和，若 $S_5=0$，则 $S_i(i=1,2,3,\cdots,100)$ 中不同的数值有________个.

11. 已知实数 $\lambda>0$，向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的模都等于 λ，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\vec{c}\cdot\vec{b}=1,\vec{c}\cdot\vec{a}=2$，则 $\lambda=$______.

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，且满足 $f(x)=f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$，记函数 $f(x)$ 的值域为 A_f，若 $a\geq\dfrac{1}{2}$，且有 $\{y\,|\,y=f(x),x\in[0,a]\}=A_f$，则实数 a 的取值范围为________.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 20 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分.

13. 已知集合 $A=[-1,2), B=Z$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

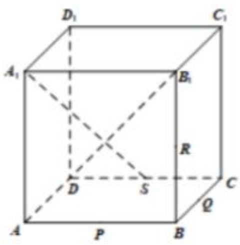
C. $\{-1,0\}$　　D. $\{-1\}$

14. 已知 $a>b>0$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a+b>2\sqrt{ab}$　B. $a+b<2\sqrt{ab}$　C. $\frac{a}{2}+2b>2\sqrt{ab}$　D. $\frac{a}{2}+2b<2\sqrt{ab}$

15. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P、Q、R、S 分别是棱 AB、BC、BB_1、CD 的中点，连接 A_1S、B_1D。对于空间任意两点 M、N，若线段 MN 上不存在点在线段 A_1S、B_1D 上，则称 M、N 两点可视。则下列选项中与点 D_1 可视的为（　　）

A. 点 P　B. 点 B　C. 点 Q　D. 点 R



16. 在平面直角坐标系中，已知关于点集 $\Omega=\left\{(x,y)\left|(x-k)^2+(y-k^2)^2=4|k|,k\in Z\right.\right\}$ 的两个结论：

①存在直线 l，使得集合 Ω 中不存在点在直线 l 上，而存在点在 l 的两侧；

②存在直线 l，使得集合 Ω 中存在无数个点在直线 l 上.

则下列判断正确的是（　　）

A. ①成立，②成立　B. ①成立，②不成立　C. ①不成立，②成立　D. ①不成立，②不成立

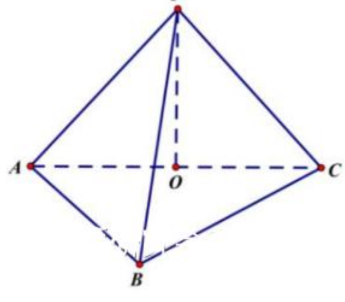
三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17.(本题满分 14 分)本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，ΔABC 是正三角形，点 O 为 AC 的中点，$PO\perp$ 平面ABC，且 $PA=AC=2$.

（1）求三棱锥 $P-ABC$ 的体积；

（2）若点 M 为 BC 的中点．求 PM 与平面 PAC 所成角的大小.



18.(本题满分 14 分)本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

已知函数 $f(x)=\log_3(x+a)+\log_3(6-x)$.

（1）若将函数 $f(x)$ 的图像向下平移 $m(m>0)$ 个单位后，图像经过点 $(3,0),(5,0)$，求实数 a 与 m 的值；

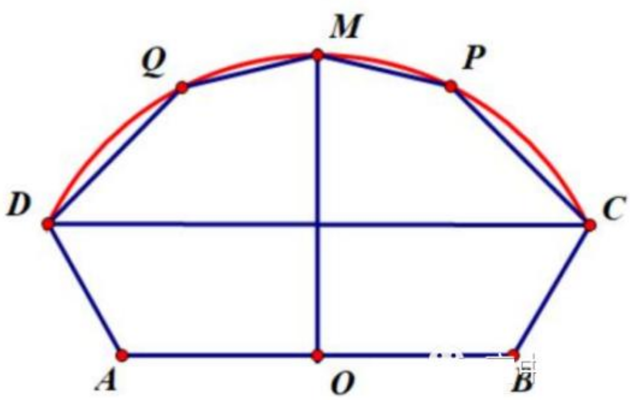
（2）若 $a>-3$ 且 $a\neq 0$，求解关于 x 不等式：$f(x)\le f(6-x)$.

19.(本题满分 14 分)本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

如图，在同一平面上，$AD=BC=6, AB=20, \angle ABC=\angle DAB=120^{\circ}$，点 O 为线段 AB 的中点，曲线段 DC 上所有点到 O 点的距离都相等，且点 M 在曲线段 DC 上，$MO\perp BC$.已知点 P 为曲线段 MC 上的一个动点，点 Q 与点 P 关于 OM 对称.

（1）若点 P 与点 C 重合，求 $\angle POB$ 的大小；

（2）求点 P 在何处时，五边形 $MQDCP$ 的面积取得最大值，并求出最大值.



20.(本题满分 16 分) 本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分.

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1\left(-\sqrt{2},0\right)$、$F_2\left(\sqrt{2},0\right)$，点 A 为椭圆 Γ 的下顶点，点 M 为直线 $l:x+y-4\sqrt{2}=0$ 上一点.

（1）若 $a=2$，线段 AM 的中点在 x 轴上，求点 M 的坐标；

（2）已知直线 l 交 y 轴于点 B，直线 AM 经过点 F_2，若 ΔABM 有一个内角的余弦值为 $\dfrac{3}{5}$，求 b 的值；

（3）若椭圆 Γ 上存在点 P 到直线 l 的距离为 d，且满足 $d+\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=6$，则当 a 变化时，求 d 的最小值.

21.(本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分.

已知在无穷数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_2=3$，若对于任意正整数 $n(n\geq 2)$，都存在 $i\left(1\leq i\leq n-1\right)$ 使得 $a_{n+1}=2a_n-a_i$.

（1）求 a_4 的所有可能值；

（2）已知命题 p：若 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8$ 成等差数列，则 $a_9<30$.

证明命题 p 为真命题，并写出命题 p 的逆命题 q，若命题 q 为真命题，则证明之，若命题 q 为假命题，请举出反例；

（3）对任意正整数 m，都有 a[illegible] $=3^m$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2022 年普通高等学校招生统一考试（上海卷）

一、填空题：本大题共 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分。

1.已知 $Z=1+i$ (其中 i 为虚数单位)，则 $2\overline{Z}=$ ＿＿＿＿＿＿ .

【知识点】复数

【答案】2-2i

【解析】$\overline{Z}=1-i, 2\overline{Z}=2-2i$。

2.双曲线 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$ 的实轴长为 ＿＿＿＿＿＿ .

【知识点】双曲线

【答案】6

【解析】$a^2=9$，$a=3$，实轴长 $2a=6$。

3.函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+1$ 的最小正周期为 ＿＿＿＿＿＿ .

【知识点】三角函数

【答案】π

【解析】函数 $f(x)=\cos 2x+1$，$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$。

4.已知 $a\in R$，行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值与行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值相等，则 $a=$＿＿＿＿＿.

【知识点】行列式

【答案】$a=3$

【解析】$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2a-3,\begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=a,2a-3=a,a=3$.

5.已知圆柱的高为 4，底面积为 9π ,圆柱侧面积为 ________.

【知识点】圆柱侧面积

【答案】 24π

【解析】$\pi r^2=9\pi,r=3$,圆柱侧面积为 $2\pi rh=24\pi$.

6.已知 $n\geq 2$ 且 $n\in N^*$，二项式 $(3+x)^n$ 的展开式中, x^2 项的系数是常数项的 5 倍,则 $n=$ ________.

【知识点】二项式定理

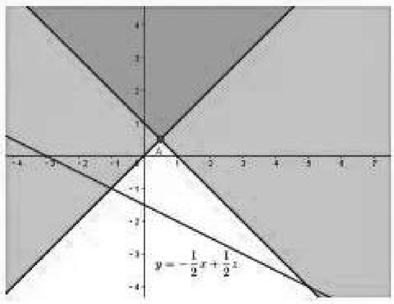
【答案】10

【解析】$T_{r+1}=C_n^r 3^{n-r}x^r,r=0,1,2,\ldots n$; 由 $C_n^2 3^{n-2}=5\cdot C_n^0 3^n$, 得 $n=10$

7.已知 $\begin{cases} x-y\leq 0 \\ x+y-1\geq 0 \end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最小值是______

【知识点】线性规划

【答案】$\dfrac{3}{2}$



【解析】如图，可行域是图中两个半平面的重叠部分，当直线 $z=x+2y$ 经过点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，直线的纵截距是最小的，所以 $z_{\min}=\dfrac{3}{2}$

8.若函数 $f(x)=\begin{cases} a^2x-1,x<0 \\ x+a,x>0 \\ 0,x=0 \end{cases}$ 为奇函数，求参数的值为________

【知识点】函数奇偶性

【答案】1

【解析】带入特值即可求解，利用$f(-1)=-f(1)$即$-a^2-1=-(1+a)$解得$a=0$或1

经检验$a=0$不符合题意舍去。简单的函数奇偶性问题属于基础题。

9.为了检测学生的身体素质指标，从游泳类1项、球类3项、田径类4项，共八项项目中，随机抽取4项进行检测，则每一类运动都被抽到的概率是________

【知识点】排列组合；概率

【答案】$\frac{3}{7}$

【解析】依题意，$P=\frac{C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1}{C_8^4}=\frac{3}{7}$

10.已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零，S_n为其前n项和，若$S_5=0$，则$S_i(i=0,1,2\cdots,100)$中不同的数值有________个.

【知识点】等差数列

【答案】98

【解析】由等差数列$S_5=0$，易知$a_3=0$，由角标性质$a_1+a_5=0,a_2+a_4=0$，

所以$S_1=S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1,S_2=S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+a_2$，因为公差不为零，

所以$S_i(i=0,1,2\cdots,100)$中不同的数值有$100-2=98$个

11.已知$\lambda>0$，向量$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\lambda$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\vec{c}\cdot\vec{b}=1,\vec{c}\cdot\vec{a}=2$，则$\lambda=$____

【知识点】向量

【答案】 $\lambda=5^{\frac{1}{4}}$

【解析】建系，设$\vec{a}=(\lambda,0),\vec{b}=(0,\lambda),\vec{c}=(x,y)$

由$\vec{c}\cdot\vec{a}=\lambda x=2\Rightarrow x=\frac{2}{\lambda}$，$\vec{c}\cdot\vec{b}=\lambda y=1\Rightarrow y=\frac{1}{\lambda}$

3

又$|\vec{c}|=\lambda \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2}+\frac{4}{\lambda^2}=\lambda^2 \Rightarrow \lambda=5^{\frac{1}{4}}$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，且满足 $f(x)=f\left(\frac{1}{1+x}\right)$，记函数的值域为 A_f，若 $a>0$，满足 $\{y|\ y=f(x),x\in[0,a]\}=A_f$，则实数 a 的取值范围为________.

【知识点】函数值域

【答案】$[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty)$

【解析】$x=\frac{1}{1+x} \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

因为$x\in[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty),\frac{1}{x+1}\in(0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$，且$f(0)=f(1)$

故$\{y|\ y=f(x),x\in[0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}]\}=\{y|\ y=f(x),x\in[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty]\}=A_f$

故只需$a\geq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$即可;

二. 选择题（本大题共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

13. $A=[-1,2)$，$B=Z$，则$A\cap B=$（　　）。

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{-1,0\}$　　D. $\{-1\}$

【知识点】集合

【答案】B

【解析】取遍$A=[-1,2)$中的所有整数，即为$A\cap B$的所有元素，故选 B。

14. $a>b>0$，以下不等式恒成立的是（　　）。

A. $a+b>2\sqrt{ab}$　　B. $a+b<2\sqrt{ab}$　　C. $\frac{a}{2}+2b>2\sqrt{ab}$　　D. $\frac{a}{2}+2b<2\sqrt{ab}$

4

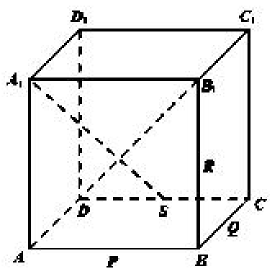
【知识点】基本不等式

【答案】A

【解析】$\because a,b>0$，$\therefore a+b\geq 2\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时等号成立，而$a>b$，故等号不成立。因此$a+b>2\sqrt{ab}$，故选$A$。$C$错误是因为等号可以取到。

15.如图正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P、Q、R、S分别为棱AB、BC、BB_1、CD的中点，联结A_1S、B_1D。空间任意两点M、N，若线段MN上不存在点在线段A_1S、B_1D上，则称M、N两点可视，则下列选项中与点D_1可视的为（　　）。

A.点P　　B.点B　　C.点R　　D.点Q



【知识点】立体几何

【答案】D

【解析】D_1P与A_1S为平行四边形A_1D_1SP的两条对角线，因此必相交，故D_1P不可视D_1B、D_1R与DB_1同在平行四边形DD_1B_1B内，且不平行，因此必相交，故D_1B、D_1R不可视。因此选D

16.已知平面直角坐标系中的点集$Q=\left\{(x,y)\middle|(x-k)^2+\left(y-k^2\right)^2=4|k|,\ k\in Z\right\}$

(1)存在直线l与Q没有公共点，且Q中存在两点在l的两侧；

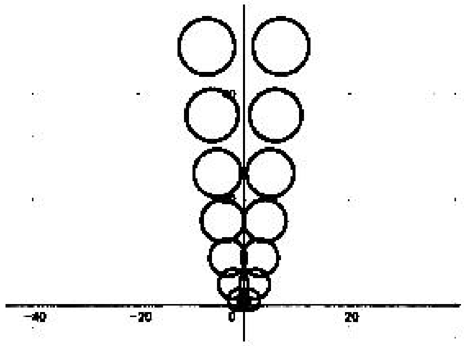
(2)存在直线l经过Q中的无穷个点，则（　　）.

A. (1)成立(2)成立　　B. (1)成立(2)不成立

C. (1)不成立(2)成立　　D. (1)不成立(2)不成立

【知识点】解析几何

【答案】 B

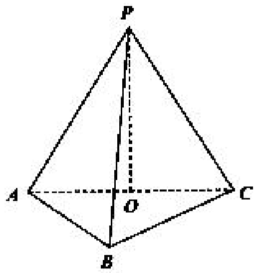


【解析】先通过赋值法让k取一些特殊值，可以画出下图

点集Q即为图中的圆组成的集合，这些圆的圆心(k,k^2)，$k\in Z$分布在$y=x^2$图像上，而对应圆的半径为$R=2\sqrt{|k|}$，通过图像可以看出（1）显然正确，而对于（2）的判定，通过观察图中圆系的包络线可以知道，不存在直线与该圆系有无数个共同点. 所以答案选B.

三. 解答题（本大题共5题，共14+14+14+16+18=76分）

17.等边ΔABC，O为AC中点，$PO\perp$平面ABC，$PA=AC=2$



(1)求三棱锥$P-ABC$的体积;

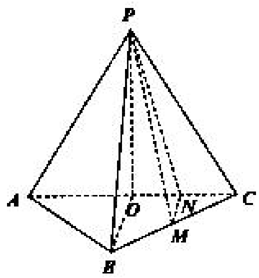
(2)若M为BC中点,，求PM与平面PAC所成角的大小.

【知识点】立体几何

【答案】（1）2;（2）$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$或者$\arctan\frac{\sqrt{39}}{13}$

【解析】(1) $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot|OP|=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=1$

（2）法一：取CO中点N，连接MN、PN，易证$MN\perp$平面PAC，



所以$\angle MPN$即为所求角，$\tan\angle MPN=\frac{MN}{PN}=\frac{\sqrt{39}}{13}$，所以$PM$与平面$PAC$所成角的大小为$\arctan\frac{\sqrt{39}}{13}$。

法二：以O为原点，OB为x轴，OC为y轴，OP为z轴建立空间直角坐标系，

易证$OB\perp$平面PAC，所以平面PAC的法向量为$\overrightarrow{OB}$，

$O(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$A(0,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$

$\overrightarrow{OB}=\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$\overrightarrow{PM}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},-\sqrt{3}\right)$，所以$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{PM}\right\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，所以$PM$与平面$PAC$所成角的大小为$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。

18.已知$f(x)=\log_3(x+a)+\log_3(6-x)$

（1）若将函数$y=f(x)$的图像向下平移$m(m>0)$个单位,经过点$(3,0),(5,0)$,求a与m的值;

（2）$a>-3$且$a\neq 0$,解关于x的不等式$f(x)\le f(6-x)$。

【知识点】对数函数

【答案】(1) $a=-2$，$m=1$ (2) $a>0$解集为$[3,6)$；$-3<a<0$解集为$(-a,3]$

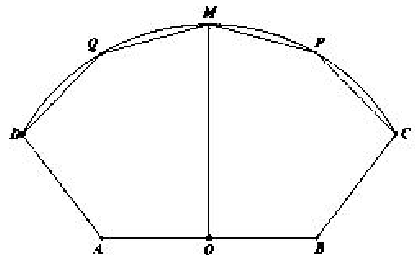
【解析】(1) $f(x)$向下平移后得到函数$g(x)=\log_3(x+a)+\log_3(6-x)-m$，$g(3)=\log_3(3+a)+1-m=0$，$g(5)=\log_3(5+a)-m=0$，两式作差可得$\log_3(3+a)-\log_3(5+a)+1=0$解得$a=-2$则$m=1$

(2) $f(x)=\log_3(x+a)+\log_3(6-x)=\log_3\left(-x^2+(6-a)x+6a\right)$，定义域$(-a,6)$ $f(x)$在$\left(-a,\dfrac{6-a}{2}\right)$递增，在$\left(\dfrac{6-a}{2},6\right)$递减，对称轴直线$x=\dfrac{6-a}{2}$，则$f(x)\le f(6-x)$等价于$\left|x-\dfrac{6-a}{2}\right|\ge\left|6-x-\dfrac{6-a}{2}\right|$，即$\left|x-\dfrac{6-a}{2}\right|\ge\left|x-\dfrac{6+a}{2}\right|$

当$a>0$时，解得$x\ge 3$，且由定义域可知，解集为$[3,6)$

当$-3<a<0$时，解得$x\le 3$，且由定义域可知，解集为$(-a,3]$

19.如图 $AD=BC=6,AB=20,\angle ABC=\angle DAB=120^{\circ}$，$O$ 为 AB 中点，曲线 CMD 上所有点到 O 的距离相等，$MO\perp AB$，P 为曲线 CM 上的动点，点 Q 与点 P 关于 OM 对称。



(1) 若 P 在点 D 的位置，求 $\angle POB$ 的大小;

(2) 求五边形 $MQABP$ 面积的最大值。

【知识点】解三角形，正弦定理，余弦定理，面积公式

【答案】(1) $\angle POC=\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14}$ (2) $S_{MQABP}MAX=28\sqrt{74}$

【解析】(1) $\because O$ 为 BC 中点，$BC=20$，$CD=20,\angle ABC=120^{\circ}$

$\therefore$ 在 ΔOCP 中，由余弦定理有：$\cos\angle ABC=\frac{|OC|^2+|CD|^2-|OD|^2}{2|OC||CD|}$ 解得：$OD=14$

又由正弦定理：$\frac{|OC|}{\sin\angle POC}=\frac{|OD|}{\sin\angle ABC}$ 解得：$\sin\angle POC=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

即 $\angle POC=\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14}$

(2) 连接 OQ,OP

由 O 到曲线 CMD 距离均相等

得 $OQ=OP=OD=OM=14$

又 $\because$ 点 Q 与点 P 关于 OM 对称

$\therefore S_{\Delta QOM}=S_{\Delta POM},S_{\Delta AOQ}=S_{\Delta BOP}$

不妨设 $\angle QOM=\angle POM=\alpha$

有 $S_{MQABP}=2\left(S_{\Delta AOQ}+S_{\Delta QOM}\right)=2\left(\frac{1}{2}|AO||OQ|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{2}|MO||OQ|\sin\alpha\right)$

即 $S_{MQABP}=140\cos\alpha+196\sin\alpha=\sqrt{58016}\sin(\alpha+\varphi)$，$\tan\varphi=\frac{35}{64}$

即 $S_{MQABP}MAX=28\sqrt{74}$

8

20.已知椭圆方程$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点为$F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，$A$为椭圆的下顶点，$M$为直线 $l:x+y-4\sqrt{2}=0$上一点.

(1) 若$a=2$,AM的中点在x轴上，求点M的坐标.

(2) 直线l交y轴于点B，直线AM经过F_2，若ΔABM有一个内角的余弦值为$\frac{3}{5}$，求b；

(3) 若Γ上存在点P到直线l的距离为d，且满足$d+|PF_1|+|PF_2|=6$，当a变化时，求d 的最小值.

【知识点】圆锥曲线

【答案】见解析

【解析】(1) $b^2=a^2-2=2\Rightarrow A\left(0,-\sqrt{2}\right)$，设$M\left(m,4\sqrt{2}-m\right)$，则线段$AM$的中点为

$\left(\frac{m}{2},\frac{3\sqrt{2}-m}{2}\right)\Rightarrow m=3\sqrt{2}$ 即点$M\left(3\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$；

(2) 当 $\cos\angle MAB=\frac{3}{5}$ 时，$\tan\angle F_2AO=\frac{OF}{OA}=\frac{4}{3}=\frac{\sqrt{2}}{b}\Rightarrow b=\frac{3}{4}\sqrt{2}$ 、当 $\cos\angle AMB=\frac{3}{5}$，

$\cos\angle MAB=-\cos(\angle AMB+\angle ABM)=-\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow b=OF_2\cdot\cot\angle MAB=\frac{\sqrt{2}}{7}$

综上$b=\frac{3}{4}\sqrt{2}$或$\frac{\sqrt{2}}{7}$；

(3) $d=6-2a(a\leqslant 3)$,设$P(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$，其中$\alpha\in R$且$b^2=a^2-2$则

$d=\frac{1}{\sqrt{2}}|a\cos\alpha+b\sin\alpha-4\sqrt{2}|=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)-4\sqrt{2}\right|=4-\sqrt{a^2-1}\sin(\alpha+\varphi)$ 其中

$\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

则，$4-\sqrt{a^2-1}\leqslant d=6-2a\leqslant 4+\sqrt{a^2-1}(\sqrt{2}<a\leqslant 3)\Rightarrow 2a-2\leqslant\sqrt{a^2-1}\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant\frac{5}{3}$ 即$\sqrt{2}<a\leqslant\frac{5}{3}\Rightarrow d_{\min}=\frac{8}{3}$.

21.数列$\{a_n\}$中,$a_1=1,a_2=3$,若对任意$n(n\geq 2)$,都存在$i(1\leq i\leq n-1)$使得 $a_{n+1}=2a_n-a_i$.

(1) 求a_4的所有可能值;

(2) 命题p:若$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8$ 成等差数列,则$a_9<30$恒成立。证明命题p为真,写出命题 p 的逆命题q,若命题q为真则证明,若命题q为假,请举出反例;

(3) 对任意正整数$m,a_{2m}=3^m$,求$\{a_n\}$.

【知识点】数列综合

【答案】(1) 9或7;(2) 证明见解析,命题q为真,证明见解析;

(3) $a_n=\begin{cases}1 & ,n=1\\ 3^{\frac{n}{2}} & ,n=2m\\ 5\cdot 3^{\frac{n-3}{2}} & ,n=2m+1\end{cases}\quad (m\in N^*)$

【解析】

(1) $n=2$时,$a_3=2a_2-a_i(1\leq n\leq 1)=2a_2-a_1=5$

$n=3$时,$a_4=2a_3-a_i(1\leq n\leq 2)$,$a_4=2a_3-a_1=9$或$a_4=2a_3-a_2=7$

即a_4的所有可能值为9或7.

(2) 若 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8$ 成等差数列,$a_1=1,a_2=3$,则 $a_n=2n-1$,$a_8=15$,

$a_9=2a_8-a_i(1\leq i\leq 7)\leq 2a_8-a_1=29<30$,即$a_9<30$恒成立,命题$p$为真.

命题q:若$a_9<30$恒成立,则$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8$ 成等差数列。

证明:若$a_8\geq 16$,则$a_9=2a_8-a_i(1\leq i\leq 7)$,

$i=1$时,$a_9=2a_8-a_1=31$,与$a_9<30$恒成立矛盾.

所以$a_8<16$,易知a_n为整数,则$a_8\leq 15$……①,

又若$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k$递增,$a_{k+1}=2a_k-a_i(1\leq i\leq k-1)=a_k+(a_k-a_i)$,由$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k$递增,$a_k>a_i$则

$a_{k+1}>a_k$,$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k,a_{k+1}$递增,

又由（1）得，a_1,a_2,a_3递增，可得$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8$递增，

$a_{n+1}=2a_n-a_i\left(1\le i\le n-1\right)\ge 2a_n-a_{n-1}$

$a_4\ge 2a_3-a_2=7,a_5\ge 2a_4-a_3=9,\cdots$，$a_8\ge 2a_7-a_6=15$……②

由①②，$a_8=15$，且由②，取等条件为$a_4=7,a_5=9,a_6=11$，$a_7=13$，$a_8=15$，

即$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8$成等差数列.

（3）由$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_8$的值猜测，$a_1=1,a_{2m}=3^m,a_{2m+1}=5\cdot 3^{m-1}\left(m\in N^*\right)$

证明：$\begin{cases}a_{2m+1}=2a_{2m}-a_i\left(1\le i\le 2m-1\right)\\a_{2m+2}=2a_{2m+1}-a_j\left(1\le j\le 2m\right)\end{cases}\Rightarrow a_{2m+2}=2\left(2a_{2m}-a_i\right)-a_j$

$3^{m+1}=2\left(2\cdot 3^m-a_i\right)-a_j\Rightarrow 2a_i+a_j=3^m$.

利用数学归纳法证明$a_{2m+1}=5\cdot 3^{m-1}\left(m\in N^*\right)$

当$m=1$，$a_3=5$，成立

假设$m=k$时，$a_{2k+1}=5\cdot 3^{k-1}\left(m\in N^*\right)$，

则$m=k+1$时，由于$2a_i+a_j=3^{k+1}\left(1\le i\le 2k+1,1\le j\le 2k+2\right)$，

当$i=j=2k$时，$2a_i+a_j=3^{k+1}$成立;

若$i,j<2k$，由（2）所证单调性，可知$a_i,a_j<3^k$，即$2a_i+a_j<3^{k+1}$，与$2a_i+a_j=3^{k+1}$矛盾;

若$i=2k+1,j<2k$，$2a_i+a_j=2\cdot 5\cdot 3^{k-1}+a_j=\dfrac{10}{9}\cdot 3^{k+1}+a_j>3^{k+1}$，矛盾;

若$i<2k,j=2k+2$，$2a_i+a_j=2a_i+3^{k+1}>3^{k+1}$，矛盾;

若$i<2k,j=2k+1$，$2a_i+a_j<2\cdot 5\cdot 3^{k-2}+5\cdot 3^{k-1}=\dfrac{25}{27}\cdot 3^{k+1}<3^{k+1}$，矛盾。

综上$i=j=2k$，即$m=k+1$时，$a_{2k+3}=2a_{2k+2}-a_{2k}=2\cdot 3^{k+1}-3^k=5\cdot 3^k\left(m\in N^*\right)$成立.

$a_1=1,a_{2m}=3^m,a_{2m+1}=5\cdot 3^{m-1}\left(m\in N^*\right)$成立.

即$a_n=\begin{cases}1 & ,n=1\\3^{\frac{n}{2}} & ,n=2m\\5\cdot 3^{\frac{n-3}{2}} & ,n=2m+1\end{cases}\quad\left(m\in N^*\right)$.


微信搜一搜
名校综合评价