数　学

得分________

本试卷共8页。时量120分钟。满分150分。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 集合$A=\{x|x^2-x-6<0\}$,集合$B=\{x|\log_2 x<1\}$,则$A\cup B=$

A. $(-2,3)$

B. $(-\infty,3)$

C. $(-2,2)$

D. $(0,2)$

2. 已知$\lambda\in\mathbf{R}$,向量$\boldsymbol{a}=(3,\lambda)$,$\boldsymbol{b}=(\lambda-1,2)$,则“$\lambda=3$”是“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 复数$z=a+b\mathrm{i}$(a, $b\in\mathbf{R}$,i为虚数单位),$\bar{z}$表示z的共轭复数,$|z|$表示z的模,则下列各式正确的是

A. $z=-\bar{z}$

B. $z\times\bar{z}=|z|$

C. $z^2=|z|^2$

D. $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

4. 若直线$l:3\sin\theta\cdot x-2y=0$与圆$C:x^2+y^2-2\sqrt{13}y-5=0$交于$M,N$两点,则$|MN|$的最小值为

A. $4\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{7}$

5. 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,0\leqslant a_n<\dfrac{1}{2},\\ 2a_n-1,\dfrac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$若$a_1=\dfrac{2}{5}$,则$a_{2023}$等于

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密　封　线　内　不　要　答　题

6. 现有长为 89 cm 的铁丝，要截成 n 小段（$n>2$），每段的长度为不小于 1 cm的整数，如果其中任意三小段都不能拼成三角形，则 n 的最大值为

A. 8　　B. 9

C. 10　　D. 11

7. 已知函数 $f(x)=\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0)$，$x\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有零点，则 ω 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{1}{8}\right]$

B. $\left(0,\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{5}{8},1\right)$

C. $\left(0,\frac{5}{8}\right]$

D. $\left(0,\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right]$

8. 已知函数 $f(x)=x^2-\left|x^2-\frac{a}{2}x-4\right|$在区间$(-\infty,-2)$，$(\sqrt{3},+\infty)$上都单调递增，则实数 a 的取值范围是

A. $0<a\leqslant2\sqrt{3}$

B. $0<a\leqslant4$

C. $0<a\leqslant4\sqrt{3}$

D. $0<a\leqslant8\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 同学们，你们是否注意到：自然下垂的铁链；空旷田野上，两根电线杆之间的电线；峡谷的上空，横跨深涧的观光索道的钢索. 这些现象中都有相似的曲线形态. 这些曲线在数学上常常被称为悬链线. 悬链线相关理论在工程、航海、光学等方面有广泛的应用. 在恰当的坐标系中，这类函数表达式可以为 $f(x)=ae^x+be^{-x}$（其中 a,b 是非零常数，无理数 $e=2.71828\cdots$），对于函数 $f(x)$，以下结论正确的是

A. 如果 $a=b$，那么 $f(x)$为奇函数

B. 如果 $ab<0$，那么 $f(x)$为单调函数

C. 如果 $ab>0$，那么 $f(x)$没有零点

D. 如果 $ab=1$，那么 $f(x)$的最小值为 2

10. 由两个全等的正四棱台组合而得到的几何体 1 如图 1，沿着 BB_1 和 DD_1 分别作上底面的垂面，垂面经过棱 EP,PH,HQ,QE 的中点 $F,$

G,M,N,则两个垂面之间的几何体2如图2所示,若$EN=AB=EA=2$,则

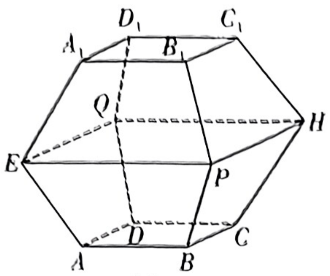


图1

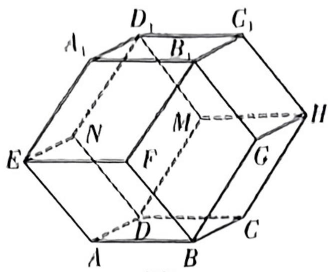


图2

A. $BB_1=2\sqrt{2}$

B. $FG /\!/ AC$

C. $BD\perp$平面BFG

D. 几何体2的表面积为$16\sqrt{3}+8$

11. 已知随机变量$\xi\sim B(2n,p)$,$n\in\mathbf{N}^*$,$n\geqslant 2$,$0<p<1$,记$f(t)=P(\xi=t)$,其中$t\in\mathbf{N}$,$t\leqslant 2n$,则

A. $\sum\limits_{t=0}^{2n}f(t)=1$

B. $\sum\limits_{t=0}^{2n}tf(t)=2np$

C. $\sum\limits_{t=0}^{n}f(2t)<\frac{1}{2}<\sum\limits_{t=1}^{n}f(2t-1)$

D. 若$np=6$,则$f(t)\leqslant f(12)$

12. 已知$ab\neq 0$,函数$f(x)=e^{ax}+x^2+bx$,则

A. 对任意a,b,$f(x)$存在唯一极值点

B. 对任意a,b,曲线$y=f(x)$过原点的切线有两条

C. 当$a+b=-2$时,$f(x)$存在零点

D. 当$a+b>0$时,$f(|x|)$的最小值为1

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

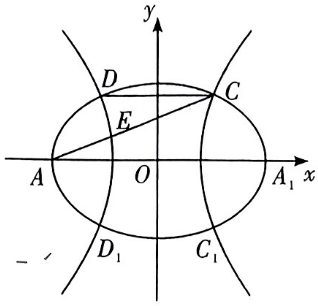
三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知$\sin\alpha-3\cos\alpha=0$,则$\cos 2\alpha+\tan\alpha=$________.

14. 用1,2,3,4,5组成没有重复数字的五位数,其中个位小于百位且百位小于万位的五位数有n个,则$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+3}-x^3$的展开式中,$x^2$的系数是________.(用数字作答)

15. 一个半径为1的小球在一个内壁棱长为$3\sqrt{6}$的正四面体容器内可向各个方向自由运动,则该小球永远不可能接触到的容器内壁的面积是________.

16. 如图，椭圆的中心在原点，长轴 AA_1 在 x 轴上. 以 A,A_1 为焦点的双曲线交椭圆于 C,D,D_1,C_1 四点，且 $|CD|=\frac{1}{2}|AA_1|$. 椭圆的一条弦 AC 交双曲线于 E，设 $\frac{AE}{EC}=\lambda$，当 $\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$ 时，双曲线的离心率的取值范围为________.



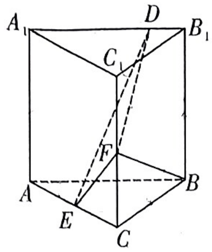
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $2(a\sin A+c\sin C-b\sin B)^2=a^2(1-\cos 2C)$.

(1) 求 B；

(2) 是否存在 $A\in(0,\pi)$，使得 $a+c=2b$，若存在，求 A；若不存在，说明理由.

18.(12 分)已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，E，F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，D 为棱 A_1B_1 上的点，$BF\perp A_1B_1$.



(1)证明：$BF\perp DE$；

(2)当 B_1D 为何值时，平面 BB_1C_1C 与平面 DFE 所成的二面角的正弦值最大？

19. (12 分)已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{3a_n}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_2}$，$\frac{2}{a_1}+\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_3}$，$a_2>0$．

(1)求证：数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列；

(2)求数列$\{a_na_{n+1}\}$的前 n 项和 S_n.

20. (12 分)已知函数 $f(x)=a(\ln x+a)-x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)<2ae^a$.

.(12 分)某单位在“全民健身日”举行了一场趣味运动会,其中一个项目为投篮游戏.游戏的规则如下:每局游戏需投篮 3 次,若投中的次数多于未投中的次数,该局得 3 分,否则得 1 分.已知甲投篮的命中率为$\frac{1}{2}$,且每次投篮的结果相互独立.

(1)求甲在一局游戏中投篮命中次数 X 的分布列与期望;

(2)若参与者连续玩 $2n(n\in\mathbf{N}^*)$局投篮游戏获得的分数的平均值大于 2,即可获得一份大奖.现有 $n=k$ 和 $n=k+1$ 两种选择,要想获奖概率最大,甲应该如何选择?请说明理由.

22.(12 分)已知抛物线 $C: y^2=x$, A,B,P 是抛物线 C 上的三点,且满足 $PA\perp PB$,过 P 作 $PD\perp AB$ 于点 D.

(1)若 $P(1,1)$,求证直线 AB 过定点;

(2)设 $P(t^2,t)(t>0)$,记点 D 轨迹围成的图形的面积为 S_1,记$\triangle OAB$ 的面积为 S_2,当直线 AB 的倾斜角不是钝角时,求$\dfrac{S_2}{S_1}$的最小值.