永州市2023年高考第三次适应性考试试卷
数学参考答案及评分标准

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	D	A	B	C	A

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	BD	AB	ACD	BC

三、填空题

13．4或16　　14．0.0315　　15．$\sqrt{3}+1$　　16．$\dfrac{\sqrt{19}+3\sqrt{3}}{6}$

部分小题答案:

7.　**解析：**

令$n=1$，则可得$a_2=\dfrac{1}{4}$，故$S_{200}>a_1+a_2=\dfrac{5}{4}$，

将两边倒数得$\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}=\dfrac{1}{a_n}$，所以$\{a_n\}$为递减数列.

所以$a_n\le 1$.

可得$\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}=\dfrac{1}{a_n}\ge\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$，

所以$\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n}}\le\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n-1}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-2}}}\cdots\dfrac{\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}}\cdot\dfrac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}=\dfrac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_1}}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

所以$a_n\le(\dfrac{1}{4})^{n-1}$，

根据等比数列求和公式得$S_{200}<(\dfrac{1}{4})^0+(\dfrac{1}{4})^1+\ldots+(\dfrac{1}{4})^{199}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{1}{4})^{199}<\dfrac{4}{3}$，

综上，$\dfrac{5}{4}<S_{200}<\dfrac{4}{3}$

8.　**解析：**

两边同时除以a得$\ln(x+a)+b\le\dfrac{1}{e(x+a)}-\left(\dfrac{b}{a}x+4\right)$，

令$t=x+a$,原不等式等价于：$\dfrac{b}{a}t+4\le\dfrac{1}{et}-\ln t$，

设$g(t)=\dfrac{1}{et}-\ln t$，$k(t)=\dfrac{b}{a}t+4$，对$g(t)$求导并画出函数图像，

1
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

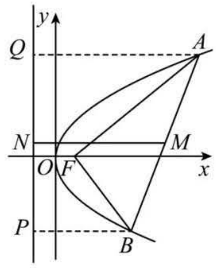
当直线$k(t)$与曲线$g(t)$相切时，解得$\frac{b}{a}=-2e$，选D

11. 解析：

A选项，因为$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，

所以A,F,B三点共线，即直线l经过抛物线焦点.

当直线l的斜率为0时，此时，直线l与C只有1个交点，不合题意，



故设直线$l:x=\frac{p}{2}+my$，与$y^2=2px$联立得：$y^2-2pmy-p^2=0$，

故$y_1+y_2=2pm,y_1y_2=-p^2$，因为$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，所以$y_1=-3y_2$，

代入$y_1+y_2=2pm,y_1y_2=-p^2$中，得到$y_2=-pm,-3y_2^2=-p^2$，

即$m^2=\frac{1}{3}$，

因为点A在第一象限，所以$y_1>0$，故$y_2<0$，

即$-pm<0$，$m>0$，

解得：$m=\frac{\sqrt{3}}{3}$故直线l的斜率为$\frac{1}{m}=\sqrt{3}$，设直线l的倾斜角为$\theta(0\le\theta<\pi)$，

则$\tan\theta=\sqrt{3}$，解得：$\theta=\frac{\pi}{3}$，A正确；

B选项，当直线l不经过焦点$F\left(\frac{p}{2},0\right)$时，设$|AF|=m$，$|BF|=n$，

由三角形三边关系可知：$|AF|+|BF|>|AB|$，

由抛物线定义可知：$|AF|+|BF|=2|MN|>|AB|$，

即$|MN|>\frac{|AB|}{2}$，B不正确；

C选项，由题意得：$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，

当直线l的斜率为0时，此时，直线l与C只有1个交点，不合题意，

故设直线$l:x=\frac{p}{2}+my$，与$y^2=2px$联立得：$y^2-2pmy-p^2=0$，

故$y_1+y_2=2pm,y_1y_2=-p^2$，

则$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{p^2}{4}-p^2=-12$，

解得：$p=4$，C正确；

D选项，设$|AF|=m,|BF|=n$，

过点A作$AQ\perp$准线于点Q，过点B作$BP\perp$准线于点P，

因为以AB为直径的圆M经过焦点F，所以$AF\perp BF$，

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

则$|AB|=\sqrt{m^2+n^2}$，由抛物线定义可知：

$|MN|=\dfrac{|AQ|+|BP|}{2}=\dfrac{|AF|+|BF|}{2}=\dfrac{m+n}{2}$，

由基本不等式得：$m^2+n^2\ge 2mn$，

则$2\left(m^2+n^2\right)\ge 2mn+m^2+n^2=\left(m+n\right)^2$，

当且仅当$m=n$时，等号成立，

故$\sqrt{m^2+n^2}\ge\dfrac{m+n}{\sqrt{2}}$，即$\dfrac{|AB|}{|MN|}=\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{\dfrac{m+n}{2}}=\dfrac{2\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}\ge\sqrt{2}$，D 正确；

故选：ACD

12. **解析：**

由题设$f(x)=2|\sin(x+\dfrac{\pi}{3})|+2|\sin(\dfrac{\pi}{6}-x)|=2|\sin(x+\dfrac{\pi}{3})|+2|\cos(x+\dfrac{\pi}{3})|$，

所以$f^2(x)=4(1+|\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})|)=4(1+|\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})|)$，

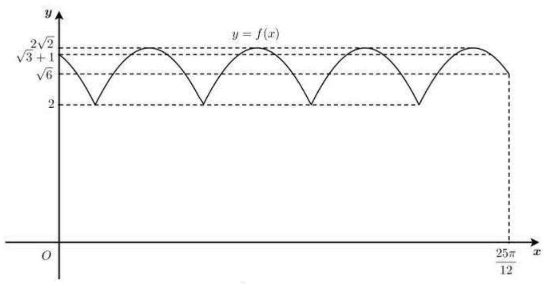
故$f(x)=2\sqrt{1+|\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})|}$，

A 选项由$y=\cos 2x$的最小正周期为π，知$y=|\cos 2x|$的最小正周期为$\dfrac{\pi}{2}$，

同理$y=2\sqrt{1+\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})}$的最小正周期为$\pi$，则$f(x)$的最小正周期为$\dfrac{\pi}{2}$，A 不正确；

对于$f(x)$，令$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{k\pi}{2}$，则对称轴方程为$x=\dfrac{k\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}$且$k\in\mathrm{Z}$，B 正确；

由$g(x)=0$可转化为$f(x)$与$y=-\dfrac{b}{2}$交点横坐标，而$x\in\left[0,\dfrac{25\pi}{12}\right]$上$f(x)$图象如下：



函数有奇数个零点，由图知：$\sqrt{6}\le-\dfrac{b}{2}\le\sqrt{3}+1$，此时共有 9 个零点，

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{x_2+x_3}{2}=\dfrac{5\pi}{12}$、$\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{2\pi}{3}$、$\dfrac{x_4+x_5}{2}=\dfrac{11\pi}{12}$、

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

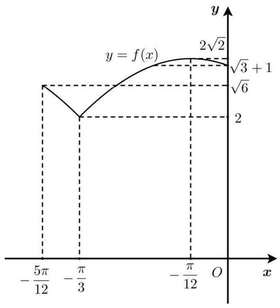
$\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{7\pi}{6}$、$\frac{x_6+x_7}{2}=\frac{17\pi}{12}$、$\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{5\pi}{3}$、$\frac{x_8+x_9}{2}=\frac{23\pi}{12}$、

$x_3-x_1=x_4-x_2=\frac{\pi}{2}$，$x_5-x_3=x_6-x_4=\frac{\pi}{2}$，$x_7-x_5=x_8-x_6=\frac{\pi}{2}$，

$x_{2n+1}+x_{2n-2}=x_{2n-1}+x_{2n}\left(n\geq 2\right)$，所以 C 正确.

对任意 x 有 $f(x)\in[2,2\sqrt{2}]$，$\exists a\in\mathbf{R}$，$\exists a_1,a_2\in\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$且 $a_1\neq a_2$ 满足

$2f(a_k)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\in[\frac{5}{2},\frac{9\sqrt{2}}{4}]$且$\left(k=1,2\right)$，而 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},0\right]$的 $f(x)$ 图象如下：



所以 $2f(a_k)\in(4,2\sqrt{6}]\cup[2(\sqrt{3}+1),4\sqrt{2})$，

$\because 4>\frac{9\sqrt{2}}{4}$　　$\therefore 2f(a_k)\neq f(x)+\frac{1}{f(x)}$

即$\left[f(x)\right]^2-2f\left(x\right)f\left(a_k\right)+1\neq 0\left(k=1,2\right)$，D 错误；

故选：BC

16. **解析：**

设 $CD_1 \cap C_1D=O$，连接 B_1D，AO，且 $B_1D\cap AO=O_1$，

所以 $B_1D\perp$ 平面 ACD_1，设正方体的棱长为 1，

则可知 B_1-ACD_1 为棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体，

所以 O_1 为等边三角形 ACD_1 的中心，

由题可得 $AO=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，得 $AO_1=\frac{2}{3}AO=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

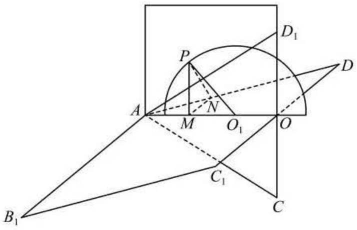
所以 $B_1O_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

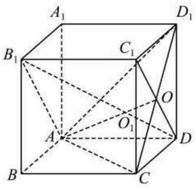
又$\because B_1P$ 与平面 ACD_1 所成角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{B_1O_1}{O_1P}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

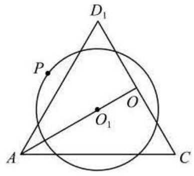
可求得 $O_1P=\frac{2}{3}$，即 P 在以 O_1 为圆心，半径 $r=\frac{2}{3}$ 的圆上，且圆在平面 ACD_1 内，

由 $B_1D\perp$ 平面 ACD_1，又$\because B_1D\subset$ 平面 AB_1C_1D，$\therefore$ 平面 $AB_1C_1D\perp$ 平面 ACD_1，且两个平

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018







面的交线为AO，把两个平面抽象出来，如图：

作$PM\perp AO$于M点，过点M作$MN\perp AD$交AD于N点，连接PN，

Q 平面$AB_1C_1D\perp$平面ACD_1，$PM\subset$平面ACD_1，平面$AB_1C_1D\cap$平面$ACD_1=AO$，

$\therefore PM\perp$平面AB_1C_1D，$AD\subset$平面AB_1C_1D，　$\therefore PM\perp AD$，

又$MN\perp AD$，MN与PM为平面PMN中两相交直线，

故$AD\perp$平面PMN，$PN\subset$平面PMN，

$\therefore AD\perp PN$，$\therefore\angle PNM$为二面角$P-AD-B_1$的平面角，即为角θ，

设$AM=x$，当M与点O_1不重合时，在$\mathrm{Rt}\triangle PMO_1$中，可得

$PM=\sqrt{(\frac{2}{3})^2-(x-\frac{\sqrt{6}}{3})^2}=\sqrt{-x^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}x-\frac{2}{9}}$，

若M与点O_1重合时，即当$x=\frac{\sqrt{6}}{3}$时，可求得$PM=PO_1=\frac{2}{3}$，也符合上式，

故$PM=\sqrt{-x^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}x-\frac{2}{9}}$，$\because MN\perp AD$，$OD\perp AD$，$\therefore MN//OD$，

$\therefore\frac{MN}{OD}=\frac{AM}{AO}$

$\therefore MN=\frac{OD\times AM}{AO}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\therefore\tan\theta=\frac{PM}{MN}=\frac{\sqrt{-x^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}x-\frac{2}{9}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}x}=\sqrt{3}\sqrt{-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\left(\frac{1}{x}\right)-1}=\sqrt{6}$

解得：$\frac{1}{x}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，$x=\frac{\sqrt{6}}{9}$

再取B_1D的中点F，连接PF,在Rt三角形PFM和Rt三角形FMO_1中

利用勾股定理得$PF=\frac{\sqrt{19}}{6}$

所以 PQ 的最大值为$PQ=\frac{\sqrt{19}+3\sqrt{3}}{6}$

四、解答题

17.（本题满分 10 分）

解：

（1）证明：由题意得 $\frac{T_n}{T_{n-1}}=a_n\ (n\geq 2)$， ……………………1 分

因为 $\frac{1}{a_n}=1-\frac{4}{T_n}$，

所以，$\frac{T_{n-1}}{T_n}=1-\frac{4}{T_n}\ (n\geq 2)$ ……………………2 分

即 $T_{n-1}=T_n-4\ (n\geq 2)$， ……………………3 分

所以 $T_n-T_{n-1}=4\ (n\geq 2)$.

当 $n=1$ 时，$a_1=T_1$，所以 $\frac{1}{T_1}=1-\frac{4}{T_1}$，解得 $T_1=5$， ……………………4 分

故 $\{T_n\}$ 是以 5 为首项，4 为公差的等差数列. ……………………5 分

（2）由（1）可知，$T_n=5+(n-1)\times 4=4n+1$， ……………………6分

所以 $b_n=(-1)^n\cdot\frac{8n+6}{T_n\cdot T_{n+1}}=(-1)^n\cdot\frac{8n+6}{(4n+1)(4n+5)}$

$=(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+5}\right)$ ……………………8分

$$S_{2n}=-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{13}\right)-\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{17}\right)+\cdots-\left(\frac{1}{8n-3}+\frac{1}{8n+1}\right)+\left(\frac{1}{8n+1}+\frac{1}{8n+5}\right)$$

$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{8n+5}$

$=-\frac{8n}{40n+25}$ ……………………10 分

18.（本题满分 12 分）

解：

（1）由正弦定理得：

$\sin C\cos A+\sqrt{3}\sin C\sin A=\sin A+\sin B$ ……………………1 分

在三角形中，$B=\pi-(A+C)$

$\sin C\cos A+\sqrt{3}\sin C\sin A=\sin A+\sin(A+C)$ ……………………2 分

$\sin C\cos A+\sqrt{3}\sin C\sin A=\sin A+\sin A\cos C+\cos A\sin C$ ……………………3 分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

$\sqrt{3}sin C-\cos C=1$ $sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ ……………………4 分

Q $C\in(0,\ \pi)$ ……………………5 分

$\therefore C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ $C=\frac{\pi}{3}$ ……………………6 分

（2）Q $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$

$\therefore BM=2$，$AM=1$

由余弦定理得

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$ 则 $9=a^2+b^2-ab$ ① ……………………7 分

又 Q $CM=\sqrt{7}$

由于 $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ $\left(\overrightarrow{CM}\right)^2=\frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

则 $63=a^2+4b^2+2ab$ ② ……………………8 分

①×7 =②即 $7a^2+7b^2-7ab=a^2+4b^2+2ab$ $2a^2-3ab+b^2=0$

亦即 $(2a-b)(a-b)=0$

则 $a=b$ 或 $a=\frac{b}{2}$ ……………………9 分

当 $a=b$ 时，代入①得 $a=3,b=3$

周长 $L=a+b+c=9$ ……………………10 分

当 $a=\frac{b}{2}$ 时，代入①得 $a=\sqrt{3},b=2\sqrt{3}$ ……………………11 分

周长 $L=a+b+c=3+3\sqrt{3}$ ……………………12 分

19.（本题满分 12 分）

解：

（1）连接 AC 交 BD 于点 O, 连接 OM

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形

$\therefore BD\perp AC$ ……………………1分

$\because M$ 为 A_1C_1 中点

$\therefore OM//BB_1$ ……………………2分

$\because$ 四边形 BDD_1B_1 为正方形

$\therefore BD\perp BB_1$，$BD\perp OM$ ……………………3分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

$\because AC \cap OM = O$

$\therefore BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 ……………………4分

$\because CM \subset$ 平面 ACC_1A_1

$\therefore BD \perp CM$ ……………………5分

（2）以O为坐标原点，OA所在直线为x轴，OB所在直线为y轴，过O且垂直于平面$ABCD$的直线为z轴，得 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，$D\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$. ……………………6分

$\because AB_1=\sqrt{3}$，$A_1B=D_1C=1$，

由（1）知，$BD \perp$ 平面 ACC_1A_1

$B_1D_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1，$B_1D_1 \perp CM$，ΔCB_1D_1 是等边三角形 $CM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……………7分

点 M 作 NH 垂直 OC 于点 H，在 ΔOMC 中，$OM=1$，$CM=CO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

可得 CM 边上的高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，由等面积法可得 OC 边上的高 $MH=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

由勾股定理可得 $OH=\frac{\sqrt{3}}{3}$， ……………………8分

故 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$D_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$

$\overline{OD}=\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$\overline{OD_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{CD_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ……………………9分

设平面 BDD_1B_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{OD}=0\\ \vec{n}\cdot\overline{OD_1}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\frac{1}{2}y=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0\end{cases}$，

取 $z=1$，平面 BDD_1B_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(\sqrt{2},0,1)$. ……………………10分

设直线 CD_1 与平面 BDD_1B_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………11分

$\therefore$ 直线 CD_1 与平面 BDD_1B_1 所成角的余弦值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………12分

20.（本题满分 12 分）

解：

（1）当=0 时，

用分层抽样的方法抽取购买传统燃油车的 6 人中，男性有 2 人，女性有 4 人. ……………1 分

8
官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

由题意可知，X 的可能取值为 1，2，3.

$P(X=1)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5},P(X=2)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5},P(X=3)=\frac{C_2^0C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}.$ ……………3 分

X 的分布列如下表

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

……………4 分

$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$ ……………5 分

（2）（i）零假设为 H_0：

性别与是否购买新能源汽车独立，即性别与是否购买新能源汽车无关联.
当=0 时，

$A_{2,2}=80$，$B_{2,2}=70$，$A_{2,3}=20$，$B_{2,3}=0.5\times0.3\times200=30$，

$A_{3,2}=60$，$B_{3,2}=0.5\times0.7\times200=70$，$A_{3,3}=40$，$B_{3,3}=0.5\times0.3\times200=30$ …………6 分

$$K^2=\frac{(A_{2,2}-B_{2,2})^2}{B_{2,2}}+\frac{(A_{2,3}-B_{2,3})^2}{B_{2,3}}+\frac{(A_{3,2}-B_{3,2})^2}{B_{3,2}}+\frac{(A_{3,3}-B_{3,3})^2}{B_{3,3}}$$

$$=\frac{(80-70)^2}{70}+\frac{(20-30)^2}{30}+\frac{(60-70)^2}{70}+\frac{(40-30)^2}{30}=\frac{200}{21}\approx9.524$$ …………7 分

$\because 9.524>7.879=x_{0.005}$， …………8 分

$\therefore$根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为性别与是否购买新能源汽车有关联，此推断犯错误的概率不超过 0.005. …………9 分

（ii）$K^2=\frac{(80-m-70)^2}{70}+\frac{(20+m-30)^2}{30}+\frac{(60+m-70)^2}{70}+\frac{(40-m-30)^2}{30}$

$=\frac{2(10-m)^2}{21}$ …………10 分

由题意可知 $\frac{2(10-m)^2}{21}\geq2.706$， …………11 分

整理得 $(10-m)^2\geq28.413$，

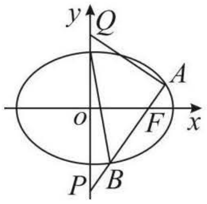
又 $m\in N$，$m<10$，$\therefore m\leq4$

所以 m 的最大值为 4，
又 $80-4=76$，
$\therefore$至少有 76 名男性购买新能源汽车 …………12 分

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

21．（本题满分 12 分）

解：



（1）证明：如图所示，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(0,t)$.

由 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AF}$，得 $x_1=\dfrac{2\lambda}{1+\lambda},y_1=\dfrac{t}{1+\lambda}$. ……………1 分

又点 A 在椭圆 C 上，故 $\dfrac{\left(\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^2}{8}+\dfrac{\left(\dfrac{t}{1+\lambda}\right)^2}{4}=1$ ……………2 分

整理得 $2\lambda^2+8\lambda-t^2+4=0$ ……………3 分

由 $\overrightarrow{PB}=\mu\overrightarrow{BF}$，同理可得 $2\mu^2+8\mu-t^2+4=0$ ……………4 分

由于 A,B 不重合，即 $\lambda\neq\mu$，

因此 λ,μ 是方程 $2x^2+8x-t^2+4=0$ 的两个根，所以 $\lambda+\mu=-4$ 为定值。 …………5 分

（2）直线 l 的方程为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{t}=1$，即 $y=-\dfrac{t}{2}(x-2)$ …………6 分

将 $y=-\dfrac{t}{2}(x-2)$ 代入 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

得 $(2+t^2)x^2-4t^2x+4t^2-16=0$ …………7 分

于是 $x_1+x_2=\dfrac{4t^2}{2+t^2},x_1x_2=\dfrac{4t^2-16}{2+t^2}$， …………8 分

从而 $S_{\Delta QAB}=S_{\Delta QAP}-S_{\Delta QBP}=\dfrac{1}{2}|2t||x_1-x_2|=|t||x_1-x_2|$， …………9 分

$$S_{\Delta QAB}^2=t^2(x_1-x_2)^2=t^2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$$

$$=t^2\left[\frac{16t^4}{(2+t^2)^2}-\frac{16t^2-64}{2+t^2}\right]$$

$$=t^2\cdot\frac{32t^2+128}{(2+t^2)}=32\left[1-\frac{4}{(2+t^2)^2}\right]$$ …………10 分

若点 P 不在椭圆 C 的内部，则 $|t|\geq 2$，即 $t^2\geq 4$，

所以 $S_{\Delta QAB}^2$ 的最小值为 $32\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{256}{9}$， …………11 分

故 ΔQAB 面积的最小值为 $\dfrac{16}{3}$. …………12 分

22.（本题满分 12 分）

解：

（1）由题意得：$h'(x)=\ln a(1-x)e^{-x}+a\cos x$，

因为 $x=0$ 为函数 $h(x)$ 的极值点，

所以，$h'(0)=\ln a+a=0$，

知：$\ln a=-a$，$h(x)=a\left(\sin x-xe^{-x}\right)$，

$h'(x)=a\left[\cos x-(1-x)e^{-x}\right]$， ……………1 分

（i）当 $x\in(-\infty,0)$ 时，

由 $a>0$，$-1\le\cos x\le1$，$1-x>1$，$e^{-x}>1$，得 $f'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$h(x)>h(0)=0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上不存在零点； ……………2 分

（ii）当 $x\in(0,\pi)$ 时，设 $\varphi(x)=\cos x-(1-x)e^{-x}$，

则 $\varphi'(x)=(2-x)e^{-x}-\sin x$.

①若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，令 $m(x)=(2-x)e^{-x}-\sin x$，

则 $m'(x)=(x-3)e^{-x}-\cos x<0$，

所以 $m(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

因为 $m(0)=2>0$，$m\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$， ……………3 分

所以存在 $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，满足 $m(a)=0$，

当 $x\in(0,a)$ 时，$m(x)=\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增；

当 $x\in\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$m(x)=\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减； ……………4 分

②若 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},2\right]$，令 $k(x)=(2-x)e^{-x}$，$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},2\right]$，

则 $k'(x)=(x-3)e^{-x}<0$，所以 $k(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},2\right]$ 上单调递减， ………5 分

所以 $k(x)<k\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}}<\dfrac{1}{e}$，

又因为 $\sin x\ge\sin 2=\sin(\pi-2)>\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\varphi'(x)=(2-x)e^{-x}-\sin x<0$，$\varphi(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},2\right]$ 上单调递减； ………6 分

③若 $x\in(2,\pi)$，则 $\varphi'(x)=(2-x)e^{-x}-\sin x<0$，$\varphi(x)$ 在 $(2,\pi)$ 上单调递减.

由（a）（b）（c）得，$h(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，$h(x)$ 在 (a,π) 单调递减，

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

因为$\varphi(a)>\varphi(0)=0$，$\varphi(\pi)=(\pi-1)e^{-\pi}-1<0$，

所以存在$\beta\in(a,\pi)$使得$\varphi(\beta)=0$，

所以，当$x\in(0,\beta)$时，$h'(x)=\varphi(x)>0$，$h(x)$在$(0,\beta)$上单调递增，$h(x)>h(0)=0$，

当$x\in(\beta,\pi)$时，$h'(x)=\varphi(x)<0$，$h(x)$在(β,π)上单调递减，

因为$h(\beta)>h(0)=0$，$h(\pi)<0$，

所以$h(x)$在区间(β,π)上有且只有一个零点.

综上，$h(x)$在区间$(-\infty,\pi)$上的零点个数为2个；　　　　………7分

（2）因为$\dfrac{\sin x}{x}=\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$，（*）

对$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$，

两边求导得：$-\sin x=-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$，　　　　………9分

$\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$，

所以$\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots$，（**）

比较（*）（**）式中x^2的系数，得$-\dfrac{1}{3!}=-\dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots\right)$　　……11分

所以$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$.　　　　………12分

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。